Федеральное агентство по образованию РФ

Бурятский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В СПОРТЕ

Улан-Удэ
2007г.

Ни одно человеческое исследование
не может называться истинной
наукой, если оно не прошло через
математические доказательства.
Леонардо да Винчи

В В Е Д Е Н И Е

Математическая статистика – раздел математики, посвященный методам сбора, анализа и обработки статистических данных для научных и практических целей, оперирует большим числом объектов и анализирует массовые явления.

Ученый В.С. Фарфель говорил: «Наука – это, в первую очередь, точное знание, собирание фактов, объективная обоснованность заключений. И во всем этом присутствуют цифры, содержащие сведения как практического, так и научного характера. Однако с цифрами надо уметь обращаться и вовремя в нужном месте применять их».

Ведь еще В.М. Зациорский (1) предупреждал, что статистика в некоторых моментах анализа научных данных может стать опасным инструментом при заключении выводов, так как за каждой цифрой стоит индивидуальный результат, показанный спортсменом и усреднять этот показатель, подводить под какие-то модели тоже не всегда бывает оправданно и нужно. И тем не менее без применения методов математической статистики невозможна обработка данных, полученных в ходе эксперимента, формулировка выводов, имеющих прикладное значение для самых различных областей человеческой деятельности, в том числе и в области физической культуры и спорта.

Любой творчески работающий специалист физического воспитания, будь то студент факультета физической культуры, пишущий курсовую или дипломную работу, аспирант, докторант, научный сотрудник, анализирующий научные данные, учитель физической культуры, тренер, в ходе своей работы получают фактический экспериментальный материал (первичный цифровой массив). Если эти данные не будут корректно обработаны с помощью методов математической статистики, то их работа теряет всякий теоретический и практический смысл.

Для построения логического рассказа в значении математической статистики и вопросах, которые она решает в области физической культуры и спорта, введем некоторые определения.

Генеральная совокупность – исходная совокупность (абсолютное количество объектов, которое существует в наличии вообще, например, все абитуриенты Бурятского государственного университета 2000 г.).

Выборка – часть объектов исследования, определенным образом выбранная из генеральной совокупности (например, абитуриенты факультета физической культуры БГУ 2000 г. – это объекты исследования, выбранные из генеральной совокупности по признаку принадлежности к факультету).

Все объекты исследования должны иметь хотя бы один общий признак, позволяющий классифицировать объекты, сравнивать их друг с другом (пол, возраст, спортивная квалификация и т.п.). В этом случае об этих объектах можно говорить как о статистической совокупности.

Фактический экспериментальный материал появляется в ходе научного эксперимента. Его традиционная схема следующая: обычно испытуемые, участвующие в научных исследованиях, делятся на контрольную и экспериментальную группы, в которых важное значение имеют признаки, определяющие испытуемых как статистическую совокупность. Эти признаки должны быть примерно одинаковыми по своим характеристикам. Иначе смысл эксперимента теряет свою научную значимость.

Контрольная группа готовится по традиционной методике, а экспериментальная – с применением нововведений. До и после эксперимента проводятся контрольные испытания (срезы) и по их результатам судят об эффективности нововведений.

Уже на этапе отбора в контрольную и экспериментальную группы исследователь сталкивается с рядом вопросов: какова должна быть численность группы, как должны отбираться кандидаты в эти группы, уровень подготовленности участников эксперимента, существенно ли отличается одна группа от другой по важным для эксперимента показателям и т.д. На все эти вопросы можно ответить только применив методы математической статистики. Например, существуют методы, позволяющие однозначно сказать о том, что выборка является представительной (репрезентативной) по отношению к генеральной совокупности. К ним относятся:

1) Методы отбора объектов из генеральной совокупности в выборку:
   а) жеребьевка;
   б) механический отбор;
   в) типический отбор;
   г) серийный отбор.
2) Методы точечных и интервальных оценок, позволяющие выявить максимально близкие значения и границы интервалов, между которыми с большей вероятностью находятся истинные значения искомых параметров.
3) Методы, позволяющие выявить тот минимальный объем выборки, который бы позволял судить о среднем значении генеральной совокупности не более чем с ошибкой на заданную величину после проведения контрольных срезов.

4) Исследователь получает первичный цифровой материал, представляющий собой, как правило, большой объем числовых данных. Массив этих чисел трудно обозрим, и сделать какие-либо выводы непосредственно по ним невозможно. Здесь используются методы описательной статистики:
   1. Группировка данных и представление их в виде статистических таблиц с выделением в них вариационных рядов.
   2. Графическое представление экспериментальных данных в виде гистограмм и полигона частот.
5) Методы, дающие представление о количественных числовых характеристиках:
   1. Характеристики положения:
      а) среднее арифметическое;
      б) медиана;
      в)мода.
   2. Характеристики рассеяния:
      а) дисперсия;
      б) стандартное отклонение;
      в)коэффициент вариации.
   1. Характеристики асимметрии эмпирических распределений:
      а) асимметрия;
      б) эксцесс.
6) После получения средних значений и характеристик рассеяния экспериментальных данных, исследователь видит, что показатели в контрольной и экспериментальной группах различаются. Возникает вопрос, насколько достоверны эти различия? Это результат нововведения или случайность? Эти вопросы решают методы проверки статистических гипотез:
   1. Критерии, основанные на нормальном распределении:
      а) F - критерий Фишера;
      б) t – критерий Стьюдента;
      в) U – критерии.
   2. Критерии согласия:
      а) χ^2 критерий (критерий хи-квадрат);
      б) критерий Шапиро-Уилки.
   3. Непараметрические критерии:
      а) критерий Вилкоксона.

7) Очень часто целью исследования является установление наличия и степени связи между спортивным результатом и определенным показателем тренированности или физического развития, между отдельными показателями физической подготовленности и т.д., подобные задачи решаются методами корреляционного и регрессивного анализа.

8) Кроме того, в некоторых случаях исследователю интересно узнать степень тесноты взаимосвязи одного показателя с двумя, тремя, четырьмя и более аргументами, влияющими на этот показатель. Например, из области биомеханической науки: в какой степени (в процентном отношении суммарно) влияют на результат прыжка в длину с разбега: начальная скорость разбега; скорость разбега на 3 метра до отталкивания; величина угла постановки толчковой ноги на отталкивании; величина угла сгибания в коленном суставе и скорость движения маховой ноги во время отталкивания, высоты полета в полетной фазе прыжка и т.д. Это пример с множеством неизвестных. Подобные этому примеру уравнения решаются с помощью методов множественной корреляции и регрессии. Еще более сложные вопросы решают факторные и другие виды анализов.

Таким образом, подчеркивая назначение основных методов, применяемых в математической статистике, мы убеждаем читателя в необходимости и обоснованности применения этих методов. В работе содержится описание этих методов, которые получили наиболее широкое распространение в практике.

I. ЭМПИРИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАБЛЮДЕНИЙ.

1. Группировка экспериментальных данных.

Полученные данные в ходе экспериментальной работы представлены в виде неупорядоченного набора чисел. Для того чтобы по ним можно было делать какие-то выводы, необходима первичная их обработка – группировка.

Рассмотрим группировку на конкретном примере.

Пример 1: В эксперименте получены данные результатов прыжка вверх с места спортсменов баскетболистов (65 человек): 59, 48, 53, 47, 57, 64, 62, 62, 65, 57, 57, 81, 83, 48, 65, 76, 53, 61, 60, 37, 51,51, 63, 81, 60, 77, 71, 57, 82, 66, 54, 47, 61, 76, 50, 57, 58, 52, 57, 40, 53, 66, 71, 61, 61, 55, 73, 50, 70, 59, 50, 59, 83, 69, 67, 66, 47, 56, 60, 43, 54, 47, 81, 76, 69 см.

В данном примере число наблюдений составило 65 измеренных значений признака (результатов прыжка вверх с места), n=65.

Для группировки имеющихся данных необходимо весь промежуток (диапазон варьирования признака) между небольшими и наименьшими значениями разбить на ряд интервалов, или, как их обычно называют, разрядов. Весь диапазон варьирования вариантов наблюдений расположен в промежутке 37-83 см. Далее необходимо определить число разрядов (R); ширину разряда (h); границы разрядов (нижняя $x_{нi,}$ верхняя $x_{вi}$).

Число разрядов можно выбрать, руководствуясь таблицей № 1.

Таблица 1

Выбор числа разрядов группировки.

Число наблюдений, (n)	Число разрядов (R)
30-60	5-8
60-100	7-10
100-200	9-12
200-500	11-16

В нашем примере число наблюдений, n=65, принимаем R=10, выбрав число разрядов, определяем ширину разряда (h) по следующей формуле: $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{R-1}$; где h – ширина разряда, x_{max}, x_{min} – наибольшее и наименьшее значение признака; R – число разрядов.

В данном примере:

$$h = \frac{83-37}{10-1} = 5{,}1 см.$$

Поскольку исходные данные определены с точностью до сантиметра, то округляем найденное значение ширины разряда до требуемой точности (целого числа). С учетом этого принимаем h = 5 см.

Теперь находим границы разрядов группировки. Рекомендуется выбрать границы разрядов таким образом, чтобы наименьшее наблюдение оказалось примерно в середине первого, а наибольшее – в середине последнего разряда. Отсюда, нижнюю границу первого разряда ($x_{н1}$) можно определить по формуле:

$$x_{н1} = x_{min} - \frac{h}{2}$$

Для рассматриваемого примера:

$$x_{н1} = 37 - \frac{5}{2} = 34{,}5 \text{ см},$$

прибавив к этой величине ширину разряда, найдем нижнюю границу второго разряда:

$$x_{н2} = 34{,}5 + 5 = 39{,}5 \text{ см}.$$

Это будет одновременно и верхняя граница предыдущего первого разряда ($x_{в1}$). Аналогично находим

$$x_{н3} = x_{в2} = 39{,}5 + 5 = 44{,}5 \text{ см}$$

и т.д. для всех десяти разрядов.

Иногда найденные границы разрядов точно совпадают с числовым значением варианта наблюдений. Возникает вопрос: в какой разряд отнести такое число? В этом случае рекомендуется уменьшить верхние границы всех разрядов на величину, равную точности измерения признака.

Далее заполняем таблицу данных, прошедших начальную статистическую обработку (табл. 2).

Таблица 2

Табличное представление данных результатов прыжка вверх с места спортсменов – баскетболистов

Номер разряда (i)	Границы разрядов ($x_{нi} – x_{вi}$)	Срединные значения (x_i)	Распределение данных	Частоты (n_i)	Частости (w_i)
1	34.5-39.5	37	0	1	0.015
2	39.5-44.5	42	00	2	0.031
3	44.5-49.5	47	000000	6	0.092
4	49.5-54.5	52	00000000000	11	0.169
5	54.5-59.5	57	000000000000	12	0.185
6	59.5-64.5	62	00000000000	11	0.169
7	64.5-69.5	67	00000000	8	0.123
8	69.5-74.5	72	0000	4	0.062
9	74.5-79.5	77	0000	4	0.062
10	79.5-84.5	82	000000	6	0.092
	Сумма		**65**	**65**	**1.000**

В первом столбце содержится номер разряда группировки (i), во втором – границы разрядов ($x_{нi}$ – $x_{вi}$), в третьем – срединные значения разрядов (x_i), четвертый столбец визуально показывает, сколько содержит каждый разряд вариантов наблюдений. Имея перед собой цифровой массив, условными значками, например кружками, отмечаем повторяемость вариантов в каждом разряде, т.е. по порядку для каждого из чисел, ставим условный значок в строке табл. 2, соответствующей разряду группировки, в которой это число попадает.

После того, как исходные данные будут исчерпаны, подсчитываем число условных значков в каждой строке и заносим их количество в пятый столбец. Числа, показывающие сколько раз варианты, относящиеся к каждому разряду, встречаются в наблюдениях, называются частотами (n_i). Сумма частот всегда равна числу наблюдений (n), что можно использовать для проверки правильности заполнения таблицы.

В шестой столбец заносится величина, показывающая долю наблюдений, попавших в данный разряд, называемая частостью (w_i). Она определяется формулой:

$$w_i = \frac{n_i}{n}$$

Сумма всех частостей всегда равна 1.

Таким образом, экспериментальные данные, представленные в такой форме (в виде таблицы) дают первичные статистические представления о результатах исследований.

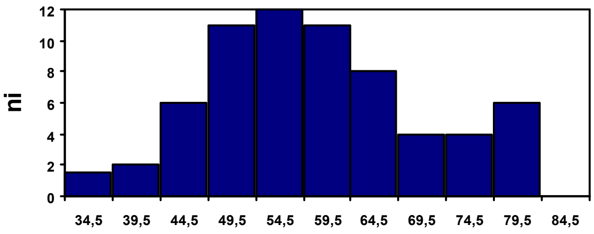


Рис.1. Гистограмма

2. Графическое представление экспериментальных данных

Эмпирические распределения экспериментальных данных нагляднее всего выглядят в виде графических изображений. Чаще всего используют две основные формы графического представления данных: гистограмма (рис. 1) и полигон частот (рис. 2).

Гистограмма состоит из примыкающих друг к другу прямоугольников, основания которых откладываются по оси абсцисс (крайние точки оснований прямоугольников – границы разрядов), а по оси ординат – высоты прямоугольников, отражающие относительную плотность распределения экспериментальных данных и пропорциональных отношениям: $\frac{n_i}{h_i}$, где n_i – частота i-го разряда, h_i – ширина i-го разряда группировки.

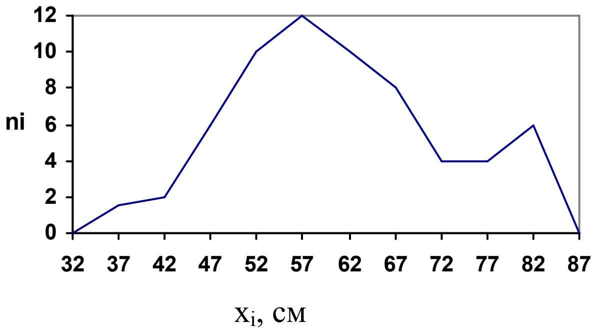


Рис.2. Полигон частот

Полигон частот образуется ломаной линией, соединяющей точки, соответствующие срединным значениям разрядов группировки (x_i) и частотам этих разрядов (n i). Срединные значения откладываются по оси абсцисс, а частоты – по оси ординат.

В рассматриваемом выше примере гистограмма и полигон частот наглядно показывают, что используемый тест (прыжок вверх с места), как инструмент измерения, исследующий скоростно-силовые качества баскетболистов, успешно различает данные, попадающие в диапазон 37-72 см. Для изучения объектов наблюдений, прыгающих выше 72 см., следует или усовершенствовать инструмент измерения, или усилить корректность проведения эксперимента.

3. Числовые характеристики наблюдений.

Первичная обработка экспериментальных данных (группировка) и графическое их представление наглядно показывают, как варьирует признак в выборочной совокупности, но они недостаточны для полной характеристики всего объема наблюдений. Необходимы обобщающие числовые характеристики, которые показывают положение центра эмпирических распределений (среднее арифметическое ($\bar{x}$); медиана (M_e); мода (M_o)), показатели их рассеяния (дисперсия (s^2); стандартное отклонение (s); коэффициент вариации (V) и асимметрии (коэффициент асимметрии (As); коэффициент эксцесса (Ex)).

3.1. Среднее арифметическое.

Среднее арифметическое или просто среднее принято обозначать той же буквой, что и варианты наблюдений, но над этой буквой ставится символ усреднения – черта. Например, если обозначить исследуемый признак через (x), то среднее арифметическое будет обозначаться – ($\bar{x}$).

Среднее арифметическое может вычисляться как по необработанным первичным данным, так и по сгруппированным показателям. Точность вычисления по необработанным данным всегда выше, но процесс вычисления оказывается трудоемким при большом объеме наблюдений.

Вычисления среднего арифметического для несгруппированных данных производится по формуле:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}, \qquad (1.1.)$$

где n – объем наблюдений; x_i – варианты наблюдений; Σ - знак суммирования.

Если данные сгруппированы, то применяется формула:

$$x = \frac{\sum n_i x_i}{n} \quad , \qquad (1.2.)$$

где n_i – частоты разрядов; x_i – срединные значение разрядов.

Результаты расчетов среднего арифметического по формулам (1.1.) и (1.2.) не всегда совпадают. Это связано с тем, что в первом случае берутся исходные данные, а во втором – суммируются произведения частот разрядов и их срединных значений.

Для практического расчета среднего арифметического $\bar{x}$ воспользуемся данными, приведенными в примере 1:

а) Для не сгруппированных данных

$$\bar{x} = \frac{59 + 48 + 53 + ... + 69}{65} = \frac{3952}{65} = 60{,}8 \ см.$$

б) Для сгруппированных данных

Для наглядности промежуточные результаты расчетов для нахождения среднего арифметического по формуле (1.2) приведены в табл. 3.

Таблица 3

Расчет среднего арифметического результата прыжка вверх с места спортсменов-баскетболистов

Номер разряда (i)	Срединные значения (x_i)	Частоты (n_i)	$n_i x_i$
1	37	1	37
2	42	2	84
3	47	6	282
4	52	11	572
5	57	12	684
6	62	11	682
7	67	8	536
8	72	4	288
9	77	4	308
10	82	6	492
	Сумма		3965

$$\bar{x} = \frac{37 + 84 + 282 + ... + 492}{65} = \frac{3965}{65} = 61 \text{ см.}$$

Кроме среднего арифметического существуют другие характеристики, определяющие положение центра эмпирического распределения. К ним относятся: медиана M_e – число разделяющее упорядоченный (по возрастанию или убыванию) ряд экспериментальных данных на две равные части; мода M_o – значение признака, встречающегося в наблюдении наиболее часто.

Медиана и мода являются вспомогательными характеристиками наблюдений и используются редко.

3.2. Характеристики рассеяния.

Среднее арифметическое, медиана и мода являются одними из самых информативных характеристик распределения, но они не дают полной картины о варьирующем признаке. Для того, чтобы увидеть в каком диапазоне рассеяны найденные значения признака, вычисляют характеристики рассеяния: дисперсия s^2; среднее квадратическое отклонение или стандартное отклонение s; коэффициент вариации V.

Дисперсия для несгруппированных данных вычисляется по формуле:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \qquad (1.3.)$$

где $\sum (x_i - \bar{x})^2$ – сумма квадратов отклонений значений признака x_i от среднего арифметического $\bar{x}$; n-1 – число степеней свободы, равное числу наблюдений без одного.

Представленную формулу затруднительно применить на практике (особенно при ручных методах вычисления), так как при увеличении объема числа наблюдений увеличивается ошибка, возникающая при суммировании округленной средней арифметической и, кроме того, увеличивается опасность сделать ошибку при суммировании многоразрядных значений x_i. Поэтому предлагается применять эту формулу в преобразованном виде:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}, \qquad (1.4.)$$

для сгруппированных данных:

$$s^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum n_i x_i^2 - \frac{(\sum n_i x_i)^2}{n}}{n-1}, \qquad (1.5.)$$

где n_i – частоты; x_i- срединные значения разрядов.

Среднее квадратическое отклонение или стандартное отклонение s рассчитывается по формуле:

$$s = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \qquad (1.6.)$$

где s^2 – дисперсия.

Размерность среднего квадратического или стандартного отклонения в отличие от размерности дисперсии совпадает с единицами измерения экспериментальных данных, поэтому на практике обычно используют s, а не s^2.

Таблица 4.

Расчет дисперсии результатов прыжка вверх с места спортсменов-баскетболистов

№ п/п	X_i, см	X_i^2	№ п/п	X_i, см	X_i^2	№ п/п	X_i, см	X_i^2
1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	59	3481	23	63	3969	45	61	3721
2	48	2304	24	81	6561	46	55	3025
3	53	2809	25	60	3600	47	73	5329
4	47	2209	26	77	5929	48	50	2500
5	57	3249	27	71	5041	49	70	4900
6	64	4096	28	57	3249	50	59	3481
7	62	3844	29	82	6724	51	50	2500
8	62	3844	30	66	4356	52	59	3481
9	65	4225	31	54	2916	53	83	6889
10	57	3249	32	47	2209	54	69	4761
11	57	3249	33	61	3721	55	67	4489
12	81	6561	34	76	5776	56	66	4356
13	83	6889	35	50	2500	57	47	2209
14	48	2304	36	57	3249	58	56	3136
15	65	4225	37	58	3364	59	60	3600
16	76	5776	38	52	2704	60	43	1849
17	53	2809	39	57	3249	61	54	2916
18	61	3721	40	40	1600	62	47	2209
19	60	3600	41	53	2809	63	81	6561
20	37	1369	42	66	4356	64	76	5776
21	51	2601	43	71	5041	65	69	4761
22	51	2601	44	61	3721	**сумма**	**3952**	**248108**

Необходимо также добавить, что в практической статистике часто требуется определить уровень однородности выборочных наблюдений. Для этого используется безразмерный показатель – коэффициент вариации V:

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad , \qquad (1.7.)$$

Считается, что если коэффициент вариации не превышает 10%, то наблюдения можно считать однородными (Н.А. Масальгин, 1974 г.).

Кроме того, коэффициент вариации часто используется при сопоставлении (сравнении) степени варьирования различных признаков, выраженных в различных единицах измерения.

Рассмотрим расчет дисперсии стандартного отклонения и коэффициента вариации, используя данные примера 1.

В начале вычислим характеристики рассеяния по несгруппированным данным (промежуточные расчеты приведены в табл. 4).

По формуле (1.4.) находим:

$$s^2 = \frac{248108 - \frac{3952^2}{65}}{65 - 1} = 122.3 \text{ см}^2.$$

Стандартное отклонение составит: s = $\sqrt{S^2}$ = $\sqrt{122.3}$= 11 см, отсюда коэффициент вариации:

$$V = \frac{11}{60.8} * 100\ \% = 18.1\%$$

Для сгруппированных данных (промежуточные расчеты приведены в табл. 5):

Таблица 5.

x_i, см	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
37	1	37	1369
42	2	84	3528
47	6	282	13254
52	11	572	29744
57	12	684	38988
62	11	682	42284
67	8	536	35912
72	4	288	20736
77	4	308	23716
82	6	492	40344
сумма		3965	249875

По формуле (1.5.) находим:

$$s^2 = \frac{249875 - \frac{3965^2}{65}}{65 - 1} = 125{,}2 \text{ см}^2,$$

стандартное отклонение составит: $s = \sqrt{125{,}2} = 11{,}2$ см, отсюда, коэффициент вариации

$$V = \frac{11{,}2}{61} \cdot 100\ \% = 18{,}4\%$$

II. ВЫБОРКА

В условиях эксперимента очень сложно провести обследование всей совокупности значений изучаемого признака у спортсменов, относящихся к какому-либо виду спорта, квалификации и т.д.

Вся совокупность в целом называется генеральной (общей). Часть генеральной совокупности называется выборочной совокупностью – выборкой. Объем выборки n, обычно значительно меньше, чем объем генеральной совокупности N. Последний часто приравнивают к бесконечному числу наблюдений.

Правильно произведенная выборка хорошо представляет, репрезентирует (от лат. reprezento – представляю) структуру или состояние генеральной совокупности.

В связи с этим, важно учитывать условия, в которых выборка будет отражать генеральную совокупность. Объективность полученных экспериментальных данных в выборке может обеспечить принцип случайного отбора варианта из генеральной совокупности (принцип рендомизации). Для этого применяют приемы по типу лотереи или жеребьевки при отборе участников эксперимента.

III. СТАНДАРТНАЯ ОШИБКА СРЕДНЕГО АРИФМЕТИЧЕСКОГО

Характеристики генеральной совокупности принято обозначать буквами греческого алфавита: М – генеральное среднее арифметическое, G – генеральное стандартное отклонение и т.д. характеристики выборки обозначаются латинскими буквами: $\bar{x}$ – среднее арифметическое выборки, s – стандартное отклонение выборки. По отношению к характеристикам генеральной совокупности выборочные характеристики являются случайными и могут не совпадать с генеральными. Экспериментально проверить это утверждение невозможно, поскольку неизвестны истинные значения параметров генеральной совокупности. Но если вычислить несколько $\bar{x}$ и s, используя разные группы испытуемых одной и той же совокупности, то закономерно, полученные средние арифметические выборок $\bar{x}$ будут варьировать вокруг генерального среднего арифметического М в $\sqrt{n}$ раз меньше, чем отдельные варианты выборки. В связи с этим, для вычисления ошибки, которая неизбежно возникает при вычислении М по выборочным оценкам $\bar{x}$, рекомендуется применять формулу:

$$m_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}, \qquad (3.1.)$$

где $m_{\bar{x}}$ - стандартная ошибка среднего арифметического; s – выборочное стандартное отклонение, n – объем выборки. Из формулы видно, что с увеличением объема выборки снижается стандартная ошибка среднего арифметического.

Найдем стандартную ошибку среднего арифметического результатов прыжка вверх с места спортсменов-баскетболистов (данные примера 1)

$$m_{\bar{x}} = \frac{11}{\sqrt{65}} = 1{,}4 см \qquad ;$$

Величина $m_{\bar{x}}$ показывает, какая ошибка в среднем допускается, если использовать вместо генерального среднего М его выборочную оценку $\bar{x}$. Поэтому вычисленное среднее арифметическое в научных работах записывают следующим образом:

$$\bar{x} \pm m_{\bar{x}};$$

Используя полученные данные примера 1, записываем:

61 ± 1,4 см.

Но эта запись выглядит не совсем грамотно с точки зрения описательной статистики. Дело в том, что количество значащих цифр $m_{\bar{x}}$ должно соответствовать количеству значащих цифр $\bar{x}$. Поэтому, чтобы привести в нужное соответствие данную запись, необходимо округлить найденное значение

$$m_{\bar{x}} - 1,4 \approx 1,$$

либо усовершенствовать методику измерения высоты прыжка и получить выборочные данные с точностью до десятых долей сантиметра.

Таким образом, окончательно запись полученных данных из нашего примера должна выглядеть следующим образом:

61 ± 1 см,

или, если использовать вычисленное среднее арифметическое по не сгруппированным данным: 60,8 ± 1,4 см.

IV. ЗАКОН НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

1. Нормальное распределение.

Полученные практические данные непрерывных величин в ходе различных экспериментов могут принимать различные значения от - ∞ до + ∞. Но любой из исследуемых признаков в виде отдельно взятых наблюдений подчиняется определенным закономерностям различных видов распределений. Наиболее применительными в практической статистике в области физической культуры и спорта являются: нормальное распределение, x^2 – распределение, t – распределение Стьюдента, F- распределение. Основополагающая роль в математической статистике отводится нормальному распределению. Это прежде всего связано с тем, что многие из вышеперечисленных распределений, которые связаны со случайной выборкой, при увеличении объема последней, переходят в нормальное. И этому даже в большинстве случаев не может помешать влияние случайных факторов (естественные причины, ошибки измерений и др.)

Плотность вероятностей нормально распределенной случайной величины записывается в виде математического выражения:

$$f(\text{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-м)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < \chi < \infty, \qquad (4.1.)$$

где константа π= 3,14…, е- основание натуральных логарифмов, равное 2,718…; x - переменная, показывающая значение признака (случайной величины); μ - математическое ожидание ; σ - стандартное отклонение.

График плотности (нормальная кривая) показан на рис. 3

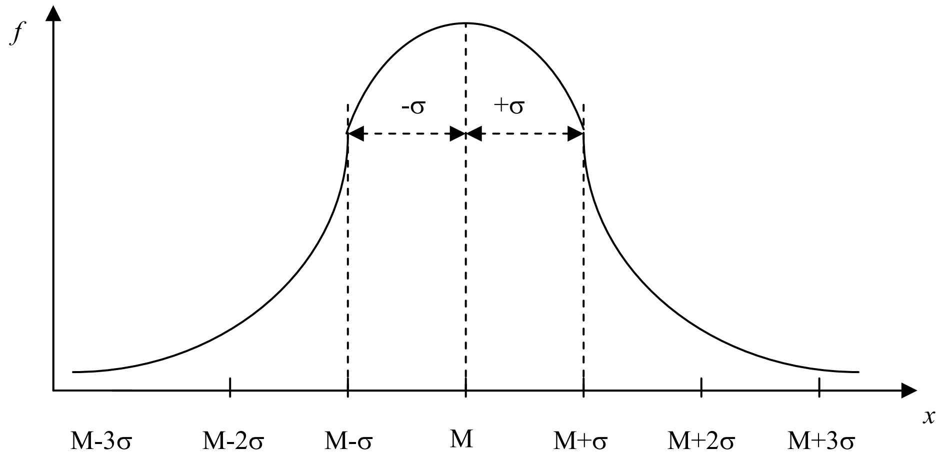


Рис.3.

Теоретическая кривая нормального распределения имеет следующие свойства:

1. Нормальная кривая имеет колонообразную форму, симметричную относительно точки x=μ, с точками перегиба, абсциссами которых являются значения: x= μ±σ;

2. При стремлении x к ±∞ асимптотически приближается к оси абсцисс;

3. Максимальное значение функции, которую она отражает, достигается при x = μ;

4. Коэффициенты асимметрии (A_s) и эксцесса (E_x) нормального распределения равны нулю.

Последнее свойство (4) используется для проверки предположения о нормальности распределения генеральной совокупности (п.7.4.)

2. Нормированное нормальное распределение.

По графику плотности нормального распределения (рис.3) видно, что форма кривой зависит от параметров – μ и σ, которые могут принимать любые значения. Следовательно, с каждым новым значение μ и σ будет возникать новая совокупность нормально распределенных данных.

Расчет плотности вероятностей f(x) каждой новой совокупности по математическому выражению (4.1.) затруднителен и поэтому используют нормированное нормальное распределение с параметрами: μ=0; σ=1. При этом нормально распределенная величина x имеет нормированное отклонение, определяемое по формуле:

$$И = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad (4.2.)$$

Плотность распределения вероятностей нормированного нормального распределения записывается выражением:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}, \qquad -\infty < u < \infty \qquad (4.3)$$

На рис. 4 показаны площади нормированного нормального распределения случайной величины относительно нормального отклонения (И) (общая площадь под кривой равна 1 (100%)).

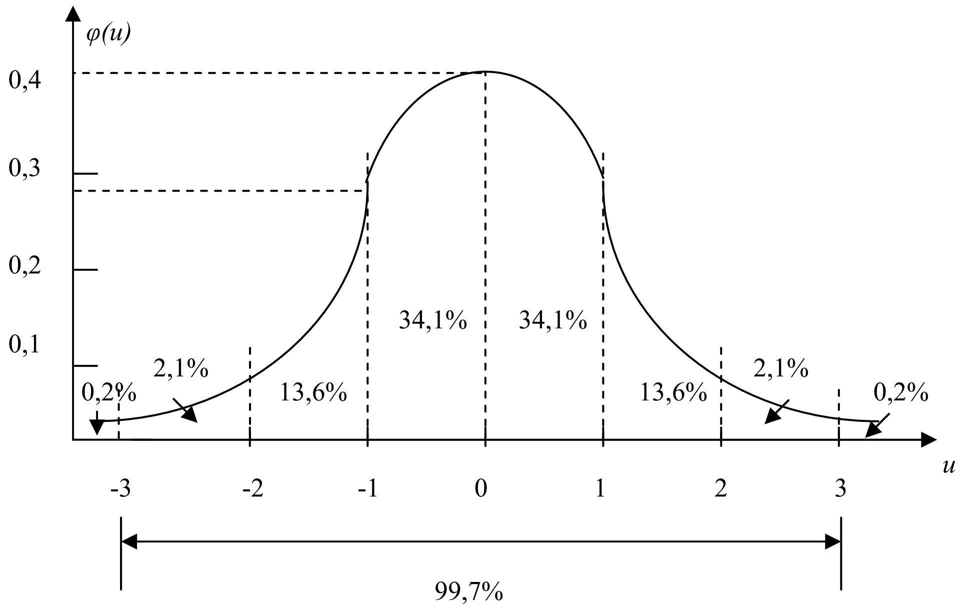


Рис.4.

Значения φ(4) для некоторых характерных нормированных отклонений (u) представлены в табл.6.

Таблица 6

Нормированное отклонение, (u)	0	± 0,5	± 1,0	± 2,0	± 3,0
Ордината нормальной кривой, φ(u)	0,399	0,352	0,242	0,054	0,004

Для нормированного нормального распределения имеются специальные таблицы, определяющие вероятность попадания случайной величины И в промежуток нормированного отклонения ±u, т.е. р (- и < И < и).

Это соответствует вероятности попадания случайной величины х в промежуток μσ ± uσ , т.е. р (μ – uσ < х < μ + uσ) или р (-uσ < х – μ < uσ). Так, например, если u=1, то р (-1σ < х – μ < 1σ) = 0, 683 это значит, что вероятность попадания случайной величины х отклонившейся от своего среднего μ более, чем на ±σ равна 0,683.

В таблице 7 показаны вероятности того, что случайная величина отклоняется от своего среднего значения по закону нормированного нормального распределения не более, чем на $\pm 0{,}5\sigma$; $\pm\sigma$; $\pm 2\sigma$; $\pm 3\sigma$.

Таблица № 7

Вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал

Нормированное отклонение, (И)	0,5	1	2	3
Границы интервала, ($\mu \pm u\sigma$)	$\mu \pm 0,5\sigma$	$\mu \pm \sigma$	$\mu \pm 2\sigma$	$\mu \pm 3\sigma$
Вероятность попадания случайной величины в интервал (р)	0,3829	0,6827	0,9548	0,9973

Из таблицы 7 видно, что вероятность попадания случайной величины х, отклонившейся от своего среднего μ более, чем на $\pm 3\sigma$, равна 0,997

$$P(-3\sigma < x - \mu < 3\sigma) = 0,997$$

Данное выражение известно в статистике как «правило трех сигм».

На практике это означает, что при общей численности 1000 испытаний в пределах ($\mu \pm 3\sigma$) должно быть 997 или 99, 7 % (почти с вероятностью 100 %) всех членов генеральной совокупности.

V. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Нормальное распределение широко применяется как математическая модель для описания экспериментальных данных.

В этом разделе будут рассмотрены три распределения, которые играют очень важную роль, при обработке результатов, связанных со случайной выборкой объема (n) и составляют основу применения критериев значимости и проверки статистических гипотез.

1. χ^2 – распределение.

Если $И_1$, $И_2$,…$И_f$ независимые случайные величины, каждая из которых имеет нормированное нормальное распределение с параметрами μ=0; σ=1, то сумма квадратов этих величин имеет так называемое χ^2 (ХИ квадрат) – распределение.

$$\chi^2 = И_1^2 + И_2^2 \ldots + И_f^2$$

Его плотность вероятностей представлена на рис. 5 и зависит от единственного параметра - числа степеней свободы f.

Кривая χ^2 – распределение имеет положительную асимметрию. С ростом числа степеней свободы f она становится более симметричной и при n ≥ 30 переходит в нормальное.

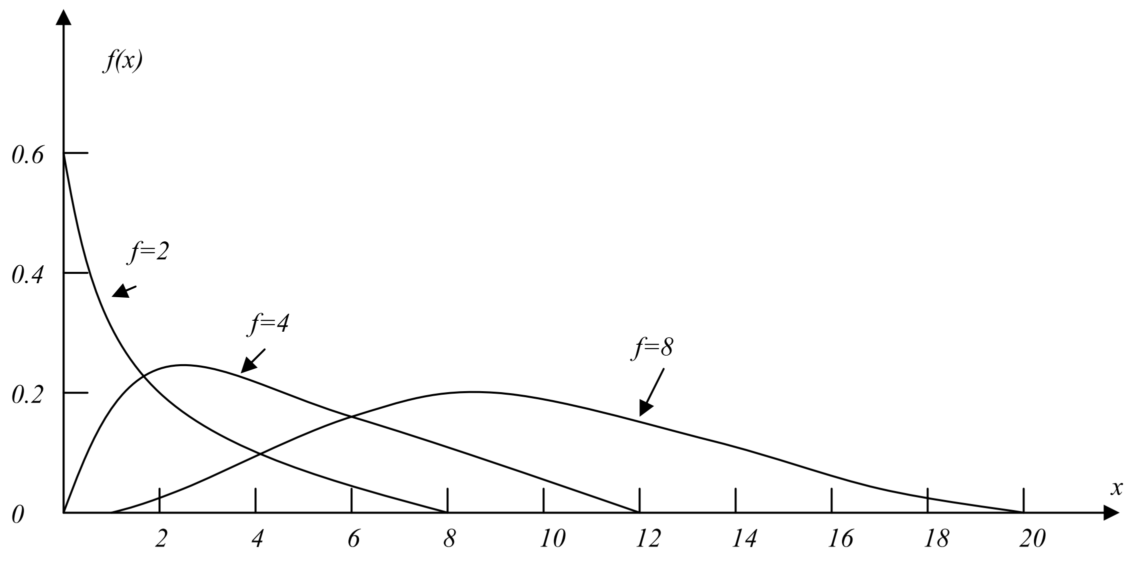


Рис.5. χ^2–распределение

Значения χ^2 - распределения приводятся в таблице 3. Приложения. В этой таблице содержаться значения x, соответствующие уровням значимости p = 0,05; 0,01; 0,001 для различного числа степеней свободы.

2. *t* – распределение Стьюдента.

Вторым из широко используемых специальных распределений является t – распределение Стьюдента. Это распределение случайной величины:

$$t = \frac{И}{\sqrt{V/f}} \qquad 5.2.1.)$$

где И – случайная величина, имеющая нормированное нормальное распределение, V – случайная величина с распределением χ^2, с f степенями свободы. t – распределение применяется при малом объеме выборки (n).

Вид кривой плотности t- распределения показан на рисунке 6.

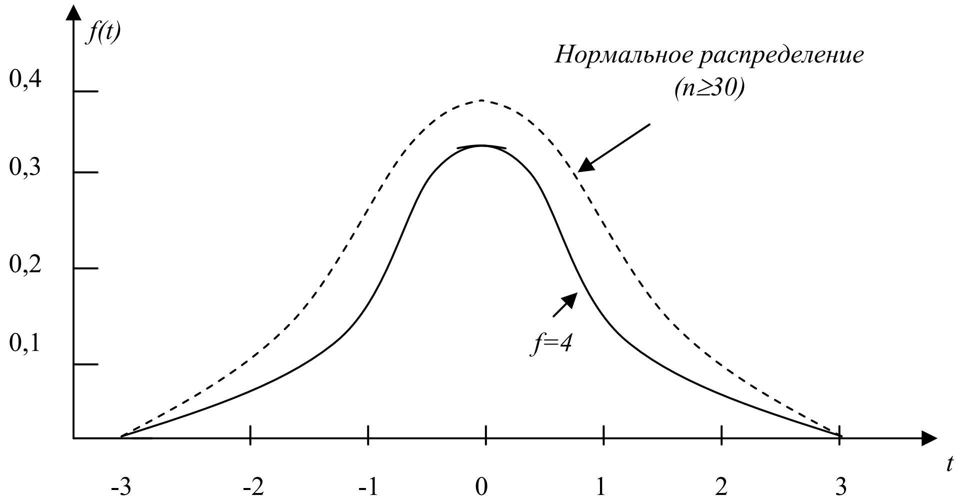


Рис.6. *t*-распределение

Кривая t- распределения Стьюдента имеет некоторые закономерности:

1) t- распределения Стьюдента строго симметрично относительно нулевой точки в системе координат, где t = 0.
2) t- распределения Стьюдента зависит от объема выборки (n), который берется числом степеней свободы f.
3) С увеличением объема выборки n t-распределения Стьюдента быстро приближается к нормальному с параметрами μ=0 и σ=1 и уже при n ≤ 30 практически не отличается от него.

Значение t- распределения Стьюдента приводятся в таблице 2 приложения.

3. *f* – распределение.

Если случайные величины И и V независимы и каждая из них распределена как χ^2 с f_1 и f_2 степенями свободы соответственно, то величина $F = \dfrac{И/\ f_1}{И/f_2}$ подчиняется так называемому F – распределению, которое зависит от двух параметров - f_1 и f_2, - называемых числами степеней свободы.

Значение F – распределения приведены в таблице 1 приложения.

Таким образом, рассмотренные выше виды распределений применяются при проверке статистических гипотез.

VI. Критерии оценки генеральных параметров.

Получение информации о закономерностях изменения изучаемого признака для большой совокупности объектов исследования, объединенных по этому признаку, является одной из основных задач, решаемых с помощью методов математической статистики.

Хочется отметить, что, для того чтобы описать генеральную совокупность с данными, имеющими нормальное распределение, достаточно знать значение генеральных параметров данной совокупности: среднее значение и стандартное отклонение. Как уже ранее отмечалось – эти параметры неизвестны, и предположительно находятся в каких-то пределах. Поэтому в математической статистике принято давать оценку генеральным параметрам по их выборочным значениям. Используемые для этого методы теории статистических выводов подразделяются на 2 класса: **оценка параметров и проверка гипотез**.

Задача **оценки параметров** состоит в получении выборочных данных, наиболее приближенных к параметрам генеральной совокупности. **Проверка гипотез** определяет с помощью специальных методов некоторые предположения относительно распределения и параметров распределения генеральной совокупности (например, о равенстве или, наоборот, различии средних значений двух генеральных совокупностей), которые делаются до получения выборочных данных.

В разделе 3 мы уже остановились на одной из типичных оценок параметров, которая дает информацию о величине ошибки, допускаемой при использовании выборочного среднего арифметического $\bar{x}$ при описании генерального среднего М.

Кроме того, в практике физической культуры и спорта значительный интерес при оценке параметров генеральной совокупности представляет определение границ доверительного интервала, в который попадает истинное значение среднего арифметического изучаемой совокупности.

1. Границы доверительного интервала.

Интервал, в котором с той или иной вероятностью находится истинное значение среднего арифметического генеральной совокупности M, можно определить, зная выборочные характеристики этой совокупности x и s.

Вероятности, признанные достаточным для того, чтобы уверенно судить о генеральных параметрах на основании выборочных характеристик, называют ***доверительными***.

Обычно, в качестве доверительных вероятностей выбирают значения 0,95; 0,99; 0,999 (их принято выражать в процентах – 95%, 99%, 99,9%).

Выбор той или иной доверительной вероятности производится исследователем, исходя из практических соображений о той мере ответственности, с какой делаются выводы о генеральных параметрах. Чем выше мера ответственности, тем более высокий уровень доверительной вероятности: 99% или 99,9%.

Доверительная вероятность 0,95 (95%) считается достаточной в научных исследованиях в области физической культуры и спорта.

Интервал, в котором с заданной доверительной вероятностью находится выборочное среднее арифметическое генеральной совокупности $\bar{x}$, называется доверительным интервалом. В соответствии с доверительными вероятностями на практике используются 95%, 99%, 99,9% доверительные интервалы.

Кроме того, в математической статистике существует некоторое малое число α, значение которого предполагает вероятность того, что $\bar{x}$ выходит за границы доверительного интервала. В соответствии с принятыми доверительными вероятностями, α_1= (1- 0,95) = 0, 05; α_2 = (1 – 0,99) = 0, 01; α_3 = (1-0,999) = 0, 001.

Если формирование доверительного интервала производится по закону нормального распределения, то вероятность отклонения любой варианты от центра распределения определяется функцией нормированного отклонения. Таким образом, доверительный интервал для среднего (математического ожидания) μ, если его распределение согласуется с t – распределением Стьюдента, записывается:

$$-t_\alpha \le \frac{\overline{x} - \mu}{m_{\overline{x}}} \le t_\alpha , \qquad (6.1.1.)$$

Видоизменяем это выражение:

$$\overline{x} \text{ - } t_\alpha \, m_{\overline{x}} \le \mu \le \overline{x} + t_\alpha \, m_{\overline{x}} , \qquad (6.1.2.)$$

Это и есть доверительный интервал, в котором находится среднее математического ожидания μ. ($\overline{x}$ - t_α $m_{\overline{x}}$) и ($\overline{x}$ + $t_\alpha m_{\overline{x}}$) – границы доверительного интервала. t_α – нормированное отклонение, определяемое выбранной доверительной вероятностью. Значение t_α для стандартных значений α (0,05; 0,01; 0,001) и различных значений параметра *(f)t* – распределения (*f* = *n-1*), приведены в таблице 2 приложения.

Учитывая формулу стандартной ошибки среднего арифметического, окончательно записываем границы доверительного интервала:

$$\overline{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} . \qquad (6.1.3.)$$

Чтобы найти границы доверительного интервала среднего значения генеральной совокупности необходимо:

1. Вычислить $\overline{x}$ и s.

2. Задастся доверительной вероятностью 0,95 (95 %) или уровнем значимости 0,05 (5 %)

3. По таблице t – распределения Стьюдента найти граничные значения t_α. Так как *t* – распределение симметрично относительно нулевой точки, достаточно знать только положительное значение *t*. Например, если объем выборки n=16, то число степеней свободы *t* – распределения *f=16-1=15*. По таблице 2 приложения находим $t_{0,05}=2,13$.

4. Находим границы доверительного интервала для P=0,05; n=16:

$$\overline{x} - 2{,}13 \frac{s}{\sqrt{16}} \le \mu \le \overline{x} + 2{,}13 \frac{s}{\sqrt{16}} .$$

Ранее отмечалось, что при больших объемах выборки (n≥30) *t* – распределение Стьюдента переходит в нормальное. Поэтому доверительный интервал для μ при n≥30 можно записать следующим образом:

$$\bar{x} - u\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + u\frac{s}{\sqrt{n}}, \qquad (6.1.4)$$

где u - процентивные точки нормированного нормального распределения. Для стандартных доверительных вероятностей (95%, 99%; 99, 9%) значения (u) приведены в таблице 8.

Таблица № 8.

Значения для стандартных доверительных вероятностей

P	u
0,05	1, 96
0,01	2,58
0, 001	3, 28

Опираясь на данные примера 1, определим границы 95 % -го доверительного интервала (P=0,05) для среднего результата прыжка вверх с места спортсменов-баскетболистов. В нашем примере объем выборки n=65, т.е. для определения границ доверительного интервала можно использовать рекомендации для большого объема выборки:

1. Среднее арифметическое $\bar{x}$ = 60,8 см., стандартное отклонение s = 11,2 см.
2. Задаемся доверительной вероятностью p= 0,95 (95%);
3. Из таблицы 8 находим $u_{0,05}$ = 1,96;
4. По формуле определяем границы доверительного интервала:

$$60{,}8 - 1{,}96\,\frac{11{,}2}{\sqrt{65}} \le \mu \le 60{,}8 + 1{,}96\frac{11{,}2}{\sqrt{65}}$$

$$60{,}8 - 1{,}96 * 1{,}39 \le \mu \le 60{,}8 + 1{,}96 * 1{,}39$$

$$60{,}8 - 2{,}72 \le \mu \le 60{,}8 + 2{,}72$$

$$58{,}1 \text{ см} \le \mu \le 63{,}5 \text{ см.}$$

Таким образом, истинное значение среднего результата прыжка вверх с места спортсменов-баскетболистов находится в интервале от 58,1 см. до 63,5 см. с вероятностью p = 0, 95 (95%).

Если же объем выборки n меньше n $\le$ 30, то для определения граничного значения доверительного интервала среднего значения изучаемой генеральной совокупности, необходимо обращаться к таблице 2 приложение.

2. Определение необходимого объема выборки для получения оценок заданной точности.

Если предположить, что изучаемая генеральная совокупность подчиняется закону нормального распределения и ее дисперсия σ^2 известна, то можно определить минимальный объем выборки n. Для этого необходимо ввести доверительную вероятность и выбрать объем выборки n таким образом, чтобы доверительный интервал имел заданный размер.

Доверительный интервал для среднего значения μ в этом случае записывается:

$$\bar{x} - u\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + u\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (6.2.1.)$$

где u для стандартных доверительных вероятностей определены в таблице 8.

Пусть требуется, чтобы $\bar{x}$ отличалось от генерального μ не более, чем на заданную величину d. Это означает, что половина ширины доверительного интервала должна быть равна d, т.е. половина от

$$(\bar{x} + u\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) - (\bar{x} - u\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2u\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (6.2.2.)$$

должна равняться d:

$$u\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = d\ . \qquad (6.2.3.)$$

Отсюда требуемый объем выборки определяется следующим образом:

$$n = \left(\frac{u\sigma}{d}\right)^2. \qquad (6.2.4.)$$

Так как истинное значение параметра σ генеральной совокупности обычно неизвестно, но при n $\ge$ 30 можно использовать выборочную оценку s, тогда:

$$n = \left(\frac{us}{d}\right)^2. \qquad (6.2.5.)$$

Воспользовавшись данными примера 1, найдем минимальный объем выборки n для генерального среднего арифметического результата прыжка вверх с места спортсменов-баскетболистов по выборочному параметру s с отклонением от истинного значения не более чем на d = 1 см.

Задаемся доверительной вероятностью p = 0,95 (95 %). По таблице 8 u=1,96 и по формуле находим:

$$n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 11{,}2}{1}\right)^2 = 480$$

Таким образом, при объеме выборки n=480 спортсменов-баскетболистов существует 95% доверительность того, что выборочное среднее арифметическое (60,8 см) будет отличаться от генерального среднего не более чем на 1 см.

VII. КРИТЕРИИ ЗНАЧИМОСТИ И ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

Данная тема рассматривает методы, применяемые тогда, когда предстоит проверить какие-то теоретические предположения, связанные с эффективностью педагогического процесса (усвоение учебного материала, результат тренировочного процесса и т.д.).

Дадим некоторые определения.

Статистическая гипотеза - называется утверждение о распределении генеральной совокупности, соответствующее некоторым представлениям об изучаемом явлении. В частности, это может быть утверждение о значениях параметров μ и σ нормально распределенной генеральной совокупности.

Нулевая гипотеза (H_0) - гипотеза, основанная на утверждении, что между двумя генеральными совокупностями нет ожидаемого различия:

$$\mu_1 = \mu_2$$

Например, за μ_1 – взяты результаты прыжков в длину юных легкоатлетов, тренирующихся по традиционной методике;

μ_2 – результаты прыжков в длину другой группы юных легкоатлетов, использующих новый комплекс специальных упражнений.

Таким образом, нулевая гипотеза делает предположение, что генеральные средние арифметические (результаты всех юных прыгунов данного класса, которые могли бы тренироваться по традиционной и новой программе) не отличаются $\mu_1 = \mu_2$.

Альтернативная гипотеза (H_1) – гипотеза с утверждением, обратным нулевой гипотезе, т.е. утверждение о том, что в действительности между генеральными совокупностями есть различие: $\mu_1 \neq \mu_2$ (результаты прыжков в длину с разбега юных легкоатлетов, занимающихся по традиционной методике и новой программе не равны).

Статистические гипотезы, в частности, нулевая и альтернативная, проверяются с помощью какого-то метода – ***критерия***.

Существуют критерии, основанные на нормальном распределении данных (параметрические), к ним относятся: F - критерий Фишера; t-критерий Стьюдента; u-критерий.

Существуют критерии, которые сравнивают средние значения генеральных совокупностей μ_1 и μ_2, распределение которых отклонилось от нормального или параметры тех совокупностей, которые измеряются в шкалах порядка данных или наименований (например, произвольная нумерация игроков футбольной команды или места, занятые спортсменами на соревнованиях и т.д.). К ним относятся: критерий Вилкоксона или Уайта.

Помимо этих критериев, существуют критерии, с помощью которых проверяется предположение о нормальном распределении генеральной совокупности. Они называются критериями согласия. К ним относятся: Асимметрия (As); Эксцесс (E_x); критерий – x^2 (хи – квадрат); критерий Шапиро-Уилки.

Прежде чем рассматривать перечисленные выше критерии, мы должны определиться с уровнями значимости, которые применяются при проверке гипотез.

1. Уровни значимости

В ходе исследовательской работы очень важным моментом бывает установление наличия или отсутствия различий в полученных числовых характеристиках при изучении каких-то результатов, показанных спортсменами (испытуемыми) контрольной и экспериментальной групп.

Например, перед исследователем ставится задача – разработать экспериментальную методику обучения прыжкам в длину с разбега для учащихся общеобразовательной школы. После того как новая методика обучения разработана и применена в экспериментальной группе школьников, их средний результат вырос на 10 см ($\bar{x}$ = 10 см), а в контрольной группе этот показатель увеличился всего на 4 см ($\bar{y}$ = 4 см). Перед исследователем встает вопрос: можно ли утверждать, что нововведения эффективнее повлияли на процесс формирования изучаемого двигательного действия по сравнению с традиционной методикой или это случайность?

Отвечая на этот вопрос, исследователь перед проведением эксперимента формулирует гипотезы:

а) Нулевая гипотеза (Но) – предполагается, что новый комплекс упражнений (методика обучения) недостаточно хорошо разработан и незначительно повлияет на результат прыжков в длину с разбега, а различия в средних значениях контрольной и экспериментальной групп (если они выявятся), будут обусловлены только действием случайностей.

б) Альтернативная гипотеза (H_1) – нововведения успешно решат задачу обучения в экспериментальной группе, а полученные данные будут превосходить результаты контрольной группы. Далее нужно доказать действительно ли, статистически достоверно, или, наоборот, недостоверно различие найденных средних приростов результатов прыжков в длину с разбега ($\bar{x}$ - $\bar{y}$ = 6 см) контрольной и экспериментальной групп.

Для этого вычисляют значение некоторой величины, называемой ***критерием***, которая чаще всего имеет стандартное распределение (u - распределение, t - распределение и т.п.). Найденная величина сравнивается с критическим (граничным) значением критерия, взятым из соответствующих таблиц, и по результатам сравнения определяется статистическая достоверность наличия или отсутствия различий между двумя сравниваемыми параметрами. Как уже отмечалось выше (п.6.1.), что в области ФК и спорта достаточен уровень значимости α =0,05, более серьезные выводы рекомендуется давать, используя уровень значимости α =0,01 или α =0,001.

Чтобы избежать однозначных, убедительных ответов на поставленные серьезные вопросы, поступают следующим образом: уровень значимости до эксперимента не устанавливается точно, а по экспериментальным данным вычисляется вероятность р того, что критерий выйдет за пределы значения, рассчитанного в выборке. р – экспериментальный уровень значимости. Точное значение р также не указывают, обычно это делается следующим образом:

а) если вычисленное значение критерия (например, t - критерия Стьюдента) не превосходит критического значения (табличное, t - критерий Стьюдента) на уровне значимости $\alpha=0,05$, то различия считаются статистически недостоверными, записывается - $(p>0,05)$

б) если вычисленное значение критерия, превышает критические значения при $\alpha=0,05$; $\alpha=0,01$ или $\alpha=0,001$, то записывается – $(p<0,05)$, $(p<0,01)$, $(p<0,001)$. Это означает, что наблюдаемые различия статистически достоверны на уровнях значимости – 0,05; 0,01 или 0,001.

2. *f* - критерий Фишера

Оценка генеральных параметров с помощью выборочных данных делается с помощью F - критерия Фишера. Данный критерий указывает о наличии или отсутствии достоверного различия в двух дисперсиях. В качестве примера применения этого критерия используем рассматриваемые выше данные.

В экспериментальной группе школьников средний прирост результатов в прыжках в длину с разбега, после применения новой методики обучения, составил 10 см ($\bar{x} = 10$ см). В контрольной группе, где применялось традиционная методика – 4 см ($\bar{y} = 4$ см).

Исходные данные:

Экспериментальная группа (x_i): 17; 11; 3; 8; 9; 12; 10; 13; 10; 7.

Контрольная группа (y_i): 8; 1; 6; 2; 3; 0; 4; 7; 5; 4.

Последовательность вычисления и применения F - критерия Фишера:

1) Задаемся уровнем значимости $\alpha=0,05$.

2) Вычисляем выборочные дисперсии из нашего примера (расчеты производим по формуле (1.4)), получаем: $s^2_{\bar{x}} = 14$ см^2; $s^2_{\bar{y}} = 6,67$ см^2.

3) Вычисляем значение F - критерия по формуле:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \qquad (7.2.1.)$$

Причем, в числитель всегда ставится большая дисперсия, в знаменатель – меньшая.

$$F = \frac{14}{6.67} = 2.1$$

4) Из таблицы 1 приложения при α =0,05; $f_1 = n_1 - 1 = 9$; $f_2 = n_2 - 1 = 9$; находим

$$F_{0,05} = 3,2$$

5) Вывод: поскольку $F < F_{0.05}$, то на уровне значимости α =0,05 различие дисперсий статистически недостоверно, т.е. можно сказать, что школьники при обеих системах подготовки не отличаются по признаку вариативности результатов (Р>0,05) ($S^2_{\bar{x}} = S^2_{\bar{y}}$).

3. *t* - критерий Стьюдента

В данном разделе рассматривается доказательство достоверного различия или, наоборот, отсутствие различия в двух выборочных средних значениях для независимых выборок с помощью t-критерия Стьюдента.

Рассмотрим последовательность вычислений, используя последний пример:

1) Принимаем предположение о нормальности распределения генеральных совокупностей, из которых получены данные. Формулируем гипотезы:

Нулевая гипотеза H_o: $\mu_x = \mu_y$

Альтернативная гипотеза: H_1: $\mu_x \neq \mu_y$

Задаемся уровнем значимости $\alpha = 0,05$

2) Вычисляем выборочные характеристики используя формулы (1.1); (1.4), получаем: $\bar{x} = 10$ см

$s^2_{\bar{x}} = 14$ см^2

$\bar{y} = 4$ см

$s^2_{\bar{y}} = 6,67$ см^2

3) Используем F - критерий для проверки гипотезы о равенстве генеральных дисперсий. Это делается для того, чтобы в дальнейшем применить правильную формулу вычисления t - критерия Стьюдента. Вычисления t - критерия при разных исходных условиях, приведены в таблице 9.

4) По результатам применения F - критерия принимаем или не принимаем предположение о равенстве генеральных дисперсий по выборочным. В нашем случае $G^2_x = G^2_y$ (п.7.2.).

Таблица 9

Формулы для вычисления значения t – критерия

Nп/п	Предположения о дисперсиях G^2_1 и G^2_2	Объем выборок $n_x n_y$	Формулаt - критерия	Стандартная ошибка разности $S_{\bar{x}-\bar{y}}$	Число степеней свободы f
1	$G^2_x = G^2_y$	$n_x = n_y = n$	$t = \dfrac{\lvert\bar{x}-\bar{y}\rvert}{S_{\bar{x}-\bar{y}}}$	$S_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\dfrac{S_x^2 + S_y^2}{n}}$	$f = 2n-2$
2	$G^2_x = G^2_y$	$n_x \neq n_y$		$S_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\dfrac{n_x + n_y}{n_x n_y}} * \sqrt{\dfrac{(n_x-1)S_x^2 + (n_y-1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}}$	$f = n_x + n_y - 2$
3	$G^2_x \neq G^2_y$	$n_x = n_y = n$		$S_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\dfrac{S_x^2 + S_y^2}{n}}$	$f = (n-1)\cdot\dfrac{\left(S_x^2 + S_y^2\right)^2}{S_x^4 + S_y^4}$
4	$G^2_x \neq G_y$	$n_x \neq n_y$		$S_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_x} + \dfrac{S_y^2}{n_y}}$	$f = \dfrac{\left(\dfrac{S_x^2}{n_x} + \dfrac{S_y^2}{n_y}\right)^2}{\dfrac{S_x^4}{n_x^2(n_x-1)} + \dfrac{S_y^4}{n_y^2(n_y-1)}}$

5) Вычисляем значение t - критерия и число степеней свободы по формуле (1) из таблицы 9.

$$s_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\frac{14+6.67}{10}} = 1.44$$

$$f = 2 \cdot 10 - 2 = 18$$

$$f = \frac{10-4}{1.44} = 4.17$$

6) Из таблицы 2 Приложения находим критическое значение f - критерия при α=0,05; f=18:

$$t_{0.05} = 2{,}10$$

7) Вывод: поскольку $t > t_{0.05}$, то на уровне значимости 0,05 мы отвергаем гипотезу H_0 и принимаем альтернативную гипотезу H_1.

Таким образом, нововведения успешнее решают задачу обучения прыжкам в длину с разбега школьников, чем традиционная методика.

Далее рассмотрим сравнение двух выборочных средних значений для связанных выборок (парное сравнение).

Например, группа школьников n=10 в течение летних каникул находилась в лагере отдыха [4]. До и после сезона у них измеряли жизненную емкость легких (ЖЕЛ). По результатам измерений нужно определить, достоверно ли изменился этот показатель под влиянием физических упражнений на свежем воздухе.

Исходные данные до эксперимента (x_i ; мл) 3400; 3600; 3000; 3500; 2900; 3100; 3200; 3400; 3200; 3400.

После эксперимента ($y_{i,}$; мл): 3800; 3700; 3300; 3600; 3100; 3200; 3200; 3300; 3500; 3600.

Порядок вычислений:

1) Находим разность связанных пар результатов измерения d_i:

$$d_i = y_i - x_i \tag{7.3.1.}$$

$$d_1=400;\quad d_2=100;\quad d_3=300;\quad d_4=100;\quad d_5=200;$$

$$d_6=100;\quad d_7=0;\quad d_8=-100;\quad d_9=300;\quad d_{10}=200.$$

2) Формулируем гипотезы:

$$H_0:\ \mu_d = 0; \qquad H_1:\ \mu_d \neq 0$$

3) Выбираем уровень значимости: $\alpha = 0,05$.

4) Вычисляем $\bar{d}$ - (среднее арифметическое), s_d - (стандартное отклонение).

$\bar{d} = 160_{(мл)}$ $s_d = 150,6(\text{мл})$

5) Значение t- критерия определяем по формуле для связанных пар:

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}}; t = \frac{160}{150,6/\sqrt{10}} = 3,36 \qquad (7.3.2.)$$

6) Из таблицы 2 приложения для $\alpha = 0,05$ и $f=9$ находим $t_{0.05} = 2,26$

7) **Вывод:** Поскольку $t > t_{0.05}$ наблюдаемое различие по показателю ЖЕЛ является статистически достоверным на уровне значимости $\alpha = 0,05$ (вероятность ошибки - $P<0,05$).

4. Критерии согласия

Большинство критериев, применяемых в математической статистике, основаны на предположении о нормальности распределения экспериментальных данных в генеральной совокупности. Но, в связи с ограниченным числом вариантов в выборке, почти всегда имеются отклонения от нормального распределения. При значительных отклонениях не рекомендуют применять критерии, которые основаны на нормальном распределении. Возможность сделать вывод о том, что отклонение от нормального распределения является значительным, превышающим граничные пределы или, наоборот, незначительным, дают критерии согласия.

4.1. Проверка гипотезы о нормальности распределения с помощью коэффициентов ассиметрии (A_s) и эксцесса (E_x)

Коэффициенты асимметрии (A_s) и эксцесса (E_x) являются более простыми в вычислении по сравнению с другими критериями согласия, с помощью которых проверяется гипотеза о нормальности распределения данных. Кроме того, эти методы обладают меньшей мощностью и позволяют установить только значительные расхождения с нормальным распределением, поэтому их применяют первыми.

Коэффициент асимметрии определяется по формуле:

$$A_S = \frac{\sum_{i=1}^{R} n_i (x_i - \bar{x})^3}{ns^3}. \qquad (7.4.1.1.)$$

Коэффициент эксцесса:

$$E_x = \frac{\sum_{i=1}^{R} n_i (x_i - \bar{x})^4}{ns^4} - 3, \qquad (7.4.1.2.)$$

где: n_i - частоты интервалов группировки, R -число интервалов группировки, s - выборочное стандартное отклонение.

Полученные знания A_s и E_x сравниваются с критическими значениями на уровне значимости α. Если эти значения превышают критические, то делается вывод об отклонении от нормального распределения. Таблицы критических значений: $A_{s\alpha}$ и $E_{x\alpha}$ имеются в литературе [2;3].

В случае, если найденные значения A_s и E_x не превышают критических, то дальнейшая проверка гипотезы о нормальности распределения данных производится с помощью более точных критериев согласия:

1) Критерий χ^2 (хи- квадрат);

2) Критерий Шапиро-Уилки.

Подробное их описание и применение рассматриваются в литературе [2;3;4].

5. Непараметрические критерии

Если распределение отклоняется от нормального, используются вспомогательные критерии, помогающие сделать оценку расхождений с генеральными параметрами. В их основе лежит сравнение не самих средних значений выборок, а порядковые числа в ранжированном ряду их отдельных выборочных значений. Критерии, основанные на этом принципе, называют порядковыми или непараметрическими.

5.1. Критерий Вилкоксона или Уайта

Одним из наиболее простых и распространенных непараметрических критериев является W - критерий Вилкоксона (Уайта), используемый при сравнении связанных и несвязанных выборок.

Для того, чтобы воспользоваться этим критерием, мы должны дать определение рангу.

Ранг – порядковый номер выборочного значения в ранжированной выборке.

Величина ранга совпадает со значением выборки, если нет совпадений. Если же они есть, то величина ранга определяется как среднее арифметическое порядковых номеров совпадающих значений.

Например, пусть имеется выборка, $n = 7$, которая после ранжирования выглядит следующим образом:

N п/п	1	2	3	4	5	6	7
X_i	3	5	7	7	9	10	12

Значения порядковых номеров 3,4 совпали, поэтому величина их рангов (R) будет равна:

$$R = \frac{3+4}{2} = 3{,}5\,;$$

Таким образом, ранжированный ряд данной выборки будет следующим:

X_i	3	5	7	7	9	10	12
R_i	1	2	3,5	3,5	5	6	7

Далее рассмотрим практическое применение W - критерия Вилкоксона, используя данные примера, приведенного в п.7.2.

Требуется определить существует или нет достоверное различие в средних значениях несвязанных выборок ($\bar{x}_i$; $\bar{y}_i$) на уровне значимости α =0,05:

1. Объединяем обе выборки в одну, $n = n_x + n_y$ =20. Ранжируем объединенную выборку, располагая данные в порядке возрастания (столбец 1, табл.10). При этом отмечаем звездочкой данные, относящиеся к одной из выборок, например второй;

2. Находим ранги R_i объединенной выборки. Отмечаем звездочкой ранги, относящиеся ко второй выборке (столбец 3);

3. Находим сумму рангов, отдельно первой $\sum R_x$ и второй $\sum R_y$ выборок;

4. Меньшую сумму рангов (в нашем примере $\sum R_y = 63.5$) принимаем в качестве значения W - критерия;

Таблица 10

Расчеты W - критерия Вилкоксона для независимых выборок

N п/п	X_i, $У_i$	R_i	N п/п	X_i, $У_i$	R_i
1	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*
1	0*	1*	11	7	10,5
2	1*	2*	12	8*	12,5*
3	2*	3*	13	8	12,5
4	3*	4,5*	14	9	14
5	3	4,5	15	10	15,5
6	4*	6,5*	16	10	15,5
7	4*	6,5*	17	11	17
8	5*	8*	18	12	18
9	6*	9*	19	13	19
10	7*	10,5*	20	17	20
Суммы рангов: $\sum R_x = 146.5$; $\sum R_y = 63.5$;					

5. Из таблицы 4 приложения находим критическое значение W_α - критерия Вилкоксона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и при объемах выборки $n_1 = 10$; $n_2 = 10$:

$$W_{0,05} = 78$$

6. Вывод: поскольку $W < W_{0/05}$, то на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ мы отвергаем нулевую гипотезу H_0, т.е. с помощью W - критерия Вилкоксона мы доказали, что найденные различия в показателях прироста результатов в прыжках в длину с разбега контрольной и экспериментальной групп действительно статистически достоверны на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ ($p < 0{,}05$).

К такому же выводу мы пришли при использовании t - критерия Стьюдента.

Используя пример, рассматриваемый в п.7.3., в котором представлены результаты измерения ЖЕЛ у школьников до и после пребывания в спортивном лагере, докажем существование различия в выборках x_i и y_i для связанных пар с помощью W - критерия Вилкоксона (α =0,05).

1. Отбрасываем пары с одинаковыми значениями x_i и y_i (столбец 2 и 3; табл.11) и для дальнейших расчетов сокращаем объем выборки на число отброшенных пар (в нашем примере отбрасываем пару N 7, следовательно n =9).

2. Из оставшихся пар образуем разности $d_i = x_i - y_i$. Эти разности приведены в столбце 4.

3. Находим ранги $R|d_i|$ абсолютных значений разностей d_i. Например, рассмотрим вычисление значений рангов $Rd_2 = Rd_4 = Rd_6 = Rd_8 = 2{,}5$(см.столбец 5, табл.11). Полученные в столбце 4 разности ранжируем независимо от полученных положительных и отрицательных знаков разностей (-100; -100; -100; 100; -200; -200; -300; -300; -400). Далее находим

$$Rd_2 = Rd_4 = Rd_6 = Rd_8 = \frac{1+2+3+4}{4} = 2{,}5$$

4. Отмечаем звездочкой ранги, относящиеся к положительному значению разности.

Таблица 11

Расчеты W - критерия Вилкоксона для связанных выборок

1	2	3	4	5
N п/п	x_i	y_i	$D_i = x_i - y_i$	Ранги $\|d_i\|$
1	3400	3800	-400	9
2	3600	3700	-100	2,5
3	3000	3300	-300	7,5
4	3500	3600	-100	2,5
5	2900	3100	-200	5,5
6	3100	3200	-100	2,5
7	3200	3200	0	-
8	3400	3300	100	$2{,}5^*$
9	3200	3500	-300	7,5
10	3400	3600	-200	5,5
Суммы рангов: $R^* = 2{,}5^*$; R = 42,5				

5. Находим отдельно суммы рангов отрицательных R и положительных R^* разностей.

6. Меньшую из сумм рангов принимаем в качестве значения W – критерия, для нашего примера $W = R^* = 2{,}5$.

7. Из таблицы 5. Приложения находим критическое значение W - критерия Вилкоксона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и объеме выборки $n = 10$:

$$W_{0.05}=9.$$

8. Вывод: поскольку $W<W_{0,05}$, то на уровне значимости $\alpha=0{,}05$ мы отвергаем нулевую гипотезу H_0. Таким образом, наблюдаемое различие в нашем примере признано достоверным на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ ($P<0{,}05$).

VIII. КОРРЕЛЯЦИЯ

Для точного выражения зависимости между переменными величинами *X* и *У* в математике принимается понятие функции. При записи У=*fX*, определенному значению у, называемому аргументом, соответствует только одно значение переменной *X*. Эта зависимость называется функцией. Зависимость между переменными, которым соответствуют средние величины, называется корреляционной, или просто корреляцией: $У_x = f(x_i)$

Чтобы выявить корреляцию между скоростью разбега на последних 3 метрах от места отталкивания (x_i) и результатом в прыжках в длину с разбега (y_i), необходимо сопоставить величину показателей полученных данных. При малом количестве случаев коэффициент корреляции между изучаемыми параметрами можно определить по формуле:

$$r = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - n\overline{x}^2)(\sum y_i^2 - n\overline{y}^2)}}, \qquad (8.1.)$$

где: r - коэффициент корреляции, x_i и y_i- изучаемые параметры, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ - средние значения изучаемых параметров.

Сопряженность между X и У может принимать значения от –1 до +1. Если коэффициент корреляции поставляет величину 0,3 – слабая связь, от 0,31 до 0,5 – умеренная, от 0,51 до 0,7 – значительная, от 0,71 до 0,9 – сильная; от 0,91 до 0,99 – очень сильная.

Полученные коэффициенты корреляции сопоставляют с граничными (табл.6 приложения).

Литература

1. Зациорский В. М. Основы спортивной метрологии. М. Физкультура и спорт. 1979- 152с.
2. Лакин Г.Ф. Биометрия: Учебное пособие для университетов и педагогических институтов. – М. Высшая школа, 1973 – 343 с.
3. Масальгин И.А. Математико-статистические методы в спорте. – М. Физкультура и спорт, 1974 – 151 с.
4. Основы математической статистики : Учебное пособие для институтов физ. ульт. (Под ред. В. С. Иванова – М. Физкультура и спорт, 1990-176 с.)
5. Щербаков Е.П. Методы психолого-педагогических исследований: Учебное пособие – Омск: Изд-во ОмГПУ, 1997- 40с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица 1

Критические значения одностороннего F-критерия Фишера

(верхние числа в строке соответствуют уровню значимости 0.05; средние – 0.01; нижние – 0.001)

$f_2=n_2-1$ *число степеней свободы для меньшей дисперсии*	*$f_1=n_1-1$ число степеней свободы для большей дисперсии*											
	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	40	100
	6,4	6,3	6,2	6,1	6,0	6,0	6,0	5,9	5,8	5,8	5,7	5,7
4	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,1	14,0	13,7	13,6
	53,4	51,7	50,5	49,8	49,0	48,6	48,2	47,4	46,6	46,2	45,4	44,7
	5,2	5,0	5,0	4,9	4,8	4,8	4,7	4,7	4,6	4,6	4,5	4,4
5	11,4	11,1	10,7	10,5	10,3	10,3	10,1	9,9	9,7	9,6	9,3	9,1
	31,1	29,8	28,8	28,2	27,6	27,3	27,0	26,4	25,8	25,4	24,8	24,3
	4,5	4,4	4,3	4,2	4,2	4,1	4,0	4,0	3,9	3,9	3,8	3,7
6	9,2	8,8	8,5	8,3	8,1	8,0	7,9	7,7	7,5	7,4	7,1	7,0
	21,9	20,8	20,0	19,5	19,0	18,8	18,5	18,0	17,5	17,2	16,6	16,2
	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,7	3,6	3,6	3,5	3,4	3,3	3,3
7	7,9	7,5	7,2	7,0	6,8	6,7	6,6	6,5	6,3	6,2	5,9	5,8
	17,2	16,2	15,5	15,1	14,6	14,4	14,2	13,7	13,2	13,0	12,5	12,1
	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,3	3,2	3,2	3,1	3,0
8	7,0	6,6	6,4	6,2	6,0	5,9	5,8	5,7	5,5	5,4	5,1	5,0
	14,4	13,5	12,9	1,5	12,0	11,8	11,6	11,2	10,0	10,5	10,1	9,7
	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,1	3,0	2,9	2,8	2,8
9	6,4	5,1	5,8	5,6	5,4	5,5	5,3	5,1	4,9	4,8	4,6	4,4
	12,6	11,7	11,1	10,8	10,4	10,2	10,0	9,6	9,2	8,9	8,5	8,1
	3,5	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6
10	6,0	5,6	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,7	4,5	4,4	4,1	4,0
	11,3	10,5	9,9	9,6	9,2	9,0	8,9	8,5	8,1	7,8	7,4	7,1
	3,3	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4
12	5,4	5,1	4,8	4,7	4,5	4,4	4,3	4,2	4,0	3,7	3,6	3,5
	9,6	8,9	8,4	8,1	7,7	7,5	7,4	7,0	6,7	6,5	6,1	5,7
	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2
14	5,0	4,7	4,5	4,3	4,1	4,0	3,9	3,8	3,6	3,5	3,3	3,1
	8,6	7,9	7,4	7,1	6,8	6,6	6,5	6,1	5,8	5,6	5,2	4,9
	3,0	2,9	2,7	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1
16	4,8	4,4	4,2	4,0	3,9	3,8	3,7	3,5	3,4	3,3	3,0	2,9
	7,9	7,3	6,8	6,5	6,2	6,1	5,9	5,6	5,3	5,1	4,7	4,4
	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,0
18	4,6	4,2	4,0	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,2	3,1	2,8	2,7
	7,5	6,8	6,4	6,1	5,8	5,6	5,5	5,1	4,8	4,7	4,3	4,0
	2,9	2,7	2,6	2,5	2,5	24	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9
20	4,4	4,1	3,9	3,7	3,6	3,5	3,4	3,2	3,0	3,0	2,7	2,5
	7,1	6,5	6,0	5,7	5,4	5,3	5,1	4,8	4,5	4,4	4,0	3,7
	2,6	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6
40	3,8	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9
	5,8	5,2	4,8	4,6	4,3	4,2	4,0	3,7	3,5	3,3	3,0	2,6
	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,7	1,7	1,5	1,4
100	3,5	3,2	3,0	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1	1,8	1,6
	5,0	4,5	4,1	3,9	3,7	3,4	3,4	3,1	2,8	2,7	2,3	1,9

Примечание: Таблица составлена по Г.Ф. Лакину (1980)

Таблица 2

Критерий значения двустороннего t-критерия Стьюдента
(f-число степеней свободы)

		Уровни значимости							
f	*0.1*	*0.05*	*0.01*	*0.001*	*f*	*0.1*	*0.05*	*0.01*	*0.001*
1	6,314	12,706	63,657	636,619	21	1,721	2,080	2,831	3,819
2	2,920	4,308	9,925	31,599	22	1,717	2,074	2,819	3,792
3	2,353	3,182	5,841	12,924	23	1,714	2,069	2,807	3,768
4	2,132	2,776	4,604	8,610	24	1,711	2,064	2,797	3,745
5	2,015	2,571	4,032	6,869	25	1,708	2,060	2,787	3,725
6	1,943	2,447	3,707	5,959	26	1,706	2,056	2,779	3,707
7	1,895	2,365	3,499	5,408	27	1,703	2,052	2,711	3,690
8	1,860	2,306	3,355	5,041	28	1,701	2,048	2,763	3,674
9	1,833	2,262	3,250	4,781	29	1,699	2,045	2,756	3,659
10	1,812	2,228	3,169	4,587	30	1,697	2,042	2,750	3,646
11	1,796	2,201	3,106	4,437	40	1,684	2,021	2,704	3,551
12	1,782	2,179	3,055	4,138	50	1,676	2,009	2,678	3,505
13	1,771	2,160	3,012	4,221	60	1,664	2,000	2,660	3,505
14	1,761	2,145	2,977	4,140	80	1,664	1,990	2,639	3,416
15	1,753	2,131	2,947	4,073	100	1,660	1,984	2,626	3,391
16	1,746	2,120	2,921	4,015	120	1,658	1,980	2,617	3,373
17	1,740	2,110	2,898	3,965	200	1,653	1,972	2,601	3,340
18	1,734	2,101	2,878	3,922	500	1,648	1,965	2,586	3,310
19	1,729	2,093	2,861	3,883	∞	1,645	1,960	2,580	3,291
20	1,725	2,086	2,845	3,850					
	0,9	0,95	0,99	0,999		0,9	0,95	0,99	0,999
			Доверительные уровни						

Примечание: Таблица составлена по Л.Н. Большеву и Н.В. Смирнову (1968); М. Дж. Кендаллу и А.М. Стьюарту (1973).

Таблица 3

Критические значения критерия χ^2 (хи-квадрат)

f	α			f	α		
	0.05	0.01	0.001		0.05	0.01	0.001
1	3.84	6.63	10.83	16	26.30	32.00	39.25
2	5.99	9.21	13.82	17	27.59	33.41	40.79
3	7.81	11.34	16.27	18	28.87	34.81	42.31
4	9.49	13.28	18.48	19	30.14	36.19	43.82
5	1.07	15.09	20.51	20	31.41	37.57	45.31
6	12.59	16.81	22.46	21	32.67	38.93	46.80
7	14.07	18.48	24.32	22	33.92	40.29	48.27
8	15.51	20.09	26.13	23	35.17	41.64	49.73
9	16.92	21.67	27.64	24	36.42	42.98	51.18
10	18.31	23.21	29.59	25	37.65	44.31	52.62
11	19.68	24.72	31.26	26	38.89	45.64	54.05
12	21.03	26.22	32.22	27	40.11	46.96	55.48
13	22.36	27.69	34.69	28	41.28	48.28	56.89
14	23.68	29.14	36.12	29	42.56	49.59	58.30
15	25.00	30.58	37.70	30	43.77	50.89	59.70

Примечание: Таблица составлена по Н. Бейли (1963)/

Таблица 4

Критические значения W-критерия Вилкоксона для независимых выборок

N_1 / n_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	11	17									
6	7	12	18	26					Уровень значимости 0,05			
7	7	13	20	27	36							
8	8	14	21	29	38	49						
9	8	15	22	31	40	51	63					
10	9	15	23	32	42	53	65	78				
11	9	16	24	34	44	55	68	81	96			
12	10	17	26	35	46	58	71	85		115		
13	10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	137	
14	11	19	28	38	50	63	76	91	106	123	141	160
15	11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	145	164
16	12	21	31	42	54	67	82	97	114	131	150	169
5			15									
6		10	16	23					Уровень значимости 0,01			
7		10	17	24	32							
8		11	17	25	34	43						
9	6	11	18	26	35	45	56					
10	6	12	19	27	37	47	58	71				
11	6	12	20	28	38	49	61	74	87			
12	7	13	21	30	40	51	63	76	90	106		
13	7	14	22	31	41	53	65	79	93	109	125	
14	7	14	22	32	43	54	67	81	96	112	129	147
15	8	15	23	33	44	56	70	84	99	115	133	151
16	8	15	24	34	46	58	72	86	102	119	137	155

Примечание: Таблица составлена по Г.Ф. Лакину (1980).

Таблица 5

Критические значения W-критерия Вилкоксона для сопряженных пар

n	α		n	α		n	α	
	0.05	0.01		0.01	0.05		0.01	0.05
6	1		13	18	11	20	53	39
7	3		14	22	14	21	60	44
8	5	1	15	26	17	22	67	50
9	7	3	16	31	21	23	74	56
10	9	4	17	36	24	24	82	62
11	12	6	18	41	29	25	90	69
12	15	8	19	47	33			

Примечание: Таблица составлена по В.Ю. Урбаху (1964)

Таблица 6

Критические значения выборочного коэффициента корреляции r

Уровни значимости							
n	**0.05**	**0.01**	**0.001**	**n**	**0.05**	**0.01**	**0.001**
3	0.9969	0.999877	0.99999877	**26**	0.388	0.496	0.607
4	0.960	0.9900	0.9990	**27**	0.381	0.487	0.597
5	0.878	0.9597	0.99114	**28**	0.374	0.479	0.588
6	0.811	0.9172	0.9741	**29**	0.367	0.470	0.579
7	0.754	0.875	0.9509	**30**	0.361	0.463	0.570
8	0.707	0.834	0.9244	**32**	0.349	0.449	0.554
9	0.666	0.798	0.898	**35**	0.332	0.435	0.539
10	0.632	0.765	0.872	**37**	0.325	0.418	0.519
11	0.602	0.735	0.847	**40**	0.312	0.402	0.501
12	0.576	0.708	0.823	**42**	0.304	0.393	0.490
13	0.553	0.684	0.801	**45**	0.292	0.384	0.416
14	0.532	0.661	0.780	**47**	0.288	0.372	0.465
15	0.544	0.641	0.760	**50**	0.279	0.361	0.451
16	0.497	0.623	0.742	**52**	0.273	0.354	0.443
17	0.482	0.606	0.725	**60**	0.254	0.330	0.414
18	0.468	0.590	0.708	**80**	0.220	0.286	0.380
19	0.456	0.575	0.693	**100**	0.196	0.258	0.324
20	0.444	0.561	0.679	**125**	0.175	0.230	0.286
21	0.433	0.549	0.665	**150**	0.160	0.210	0.249
22	0.423	0.537	0.652	**250**	0.124	0.163	0.207
23	0.413	0.526	0.641	**500**	0.088	0.115	0.147
24	0.404	0.515	0.629	**1000**	0.062	0.081	0.104
25	0.396	0.505	0.618				

Примечание: Таблица составлена по Л.Н. Большеву и Н.В. Смирнову (1968); E.Tiit (1972).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Термины и символы, используемые в математической статистике

Альтернативная гипотеза (H_1) – гипотеза с утверждением о том, что в действительности между генеральными совокупностями есть различие.

Ассиметрия (A_s – коэффициент ассиметрии) – характерное отклонение от нормального распределения данных, когда наблюдается чрезмерно увеличенное количество вариантов выборки, числовое значение которых меньше среднего арифметического (правосторонняя ассиметрия) и, наоборот, больше среднего арифметического (левосторонняя ассиметрия).

Варианты (x_i; y_i) – отдельно взятый член вариационного ряда или числовое значение варьирующего признака.

Варьирование – отклонение от чего-либо, наиболее общая форма проявления изменчивости.

Вариационный ряд – ряд ранжированных значений признака, в котором указана повторяемость или частота отдельных значений (вариант) в данной совокупности.

Величина – количественное выражение всего, что можно измерить и исчислить.

Вероятность – мера объективной возможности ожидаемого результата.

Выборка (n – объем выборки) - часть генеральной совокупности или количество случаев (вариант), взятых для наблюдения, изучения.

Генеральная совокупность – исходная совокупность или абсолютное количество объектов, которая существует в наличии вообще.

Группировка – первичная обработка неупорядоченного набора чисел, полученного в ходе экспериментальной работы.

Гистограмма – изображение вариационного ряда в виде столбиковой диаграммы, в которой высоты прямоугольников соответствуют частотам разрядов.

Дискретные величины – величины, принимающие только отдельные значения из некоторого ряда чисел.

Дисперсия (G^2 – генеральная дисперсия S^2 – выборочная дисперсия) – средний квадрат отклонения значений признака от среднего арифметического.

Доверительный интервал – промежуток между границами, называемыми доверительными, в котором с той или иной вероятностью содержится параметр, оцениваемый по данным выборочного наблюдения.

Достоверность – уверенность, с которой судят о генеральных параметрах по результатам выборочных наблюдений.

Корреляция – взаимозависимость между варьирующими признаками.

Критерий – показатель, позволяющий судить о надежности выводов относительно принятой гипотезы, ожидаемого результата.

Математическое ожидание (μ) – среднее значение случайной величины, определяемое как сумма произведений всех ее возможных значений, умноженных на вероятности этих значений.

Непрерывные величины - величины, принимающие любые значения в определенном интервале.

Нулевая гипотеза (H_o) – гипотеза, основанная на утверждении, что между двумя генеральными совокупностями нет ожидаемого различия.

Ранжирование - расположение числовых значений признака в порядке их возрастания или убывания.

Ранг (R_i) – порядковый номер ранжированных значений признака.

Среднее арифметическое ($\bar{x};\bar{y}$) – среднее значение признака, сумма отклонений от которого выборочных значений признака равна нулю (с учетом знака отклонения).

Стандартное отклонение (G – генеральное стандартное отклонение; S - выборочное стандартное отклонение) – положительный корень квадратный из дисперсии.

Степень свободы (f) – числа, показывающие количество свободно варьирующих элементов статистической совокупности, способных принимать любые произвольные значения.

Частота (n_i) – абсолютная частота отдельных вариант, показывающая, как часто они встречаются в данной совокупности.

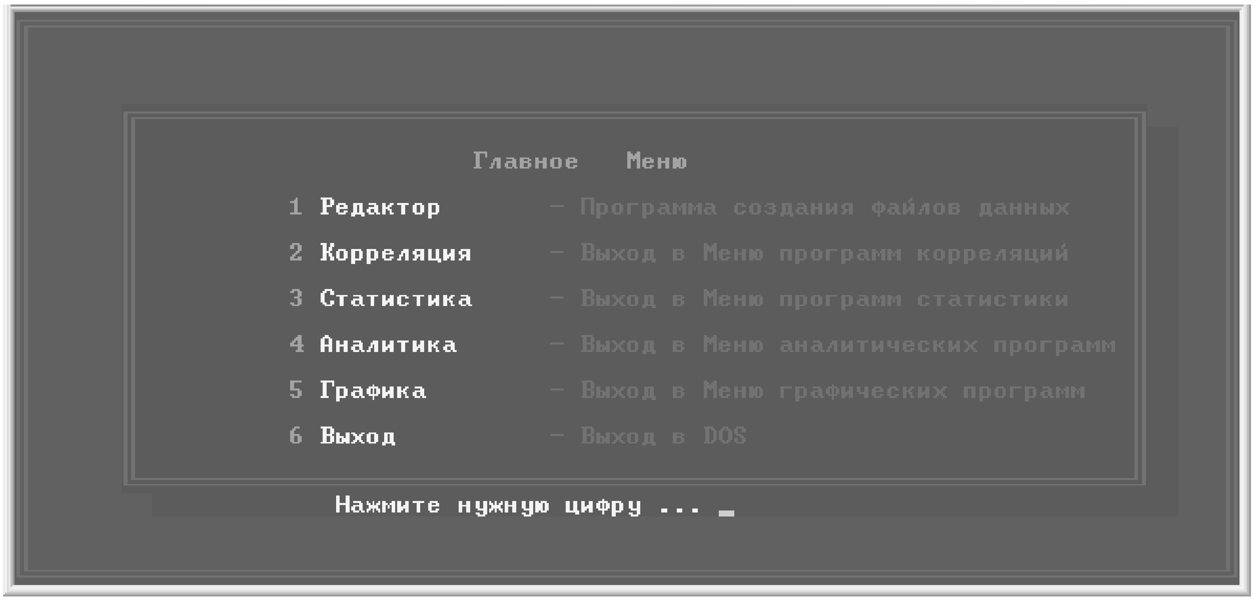
Частость (w_i) – относительная частота отдельных вариант, выражаемая в долях единицы или в процентах к общему числу наблюдений.

Эксцесс (E_x – коэффициент эксцесса) – крайнее проявление чего-либо, нарушение какого-либо нормального хода событий. В статистке – одна из форм распределения выборочных совокупностей, когда наблюдается чрезмерное накапливание вариант в центральных разрядах вариационного ряда или в разрядах, близких к центру распределения, вследствие чего вершина кривой распределения резко поднимается (положительный эксцесс), либо, наоборот, опускается по сравнению с вершиной кривой, становясь двугорбой (отрицательный эксцесс).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ARMSTAT

Программа работает в системе DOS.



В программе предусмотрены возможности создания и редактирования первичных экспериментальных данных – режим **Редактора**; изучение взаимосвязей различных показателей – режим **Коррекции**; возможность получения средних величин их вариативность и проверка статистических гипотез – **Статистика**; дисперсионный анализ данных, включающий в себя факторный, кластерный и дискриминантный анализы – **Аналитика**; и вывод графического изображения экспериментальных данных – **Графика**.

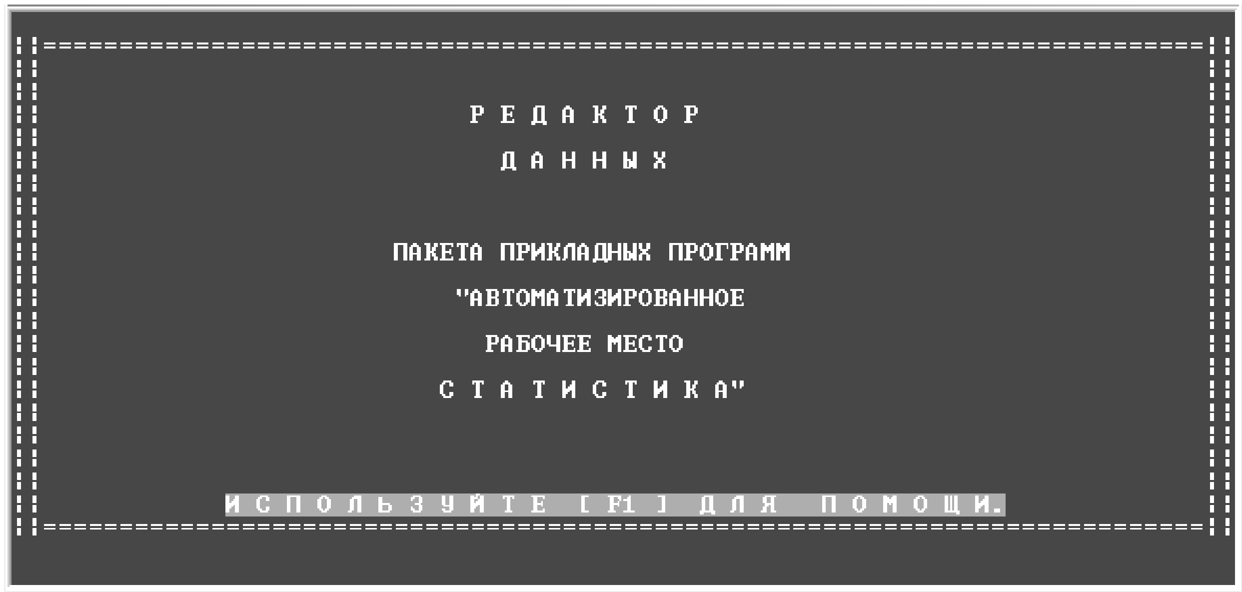
Так же в программе предусмотрена помощь:

- простая, которую можно получить при помощи кнопки F1;

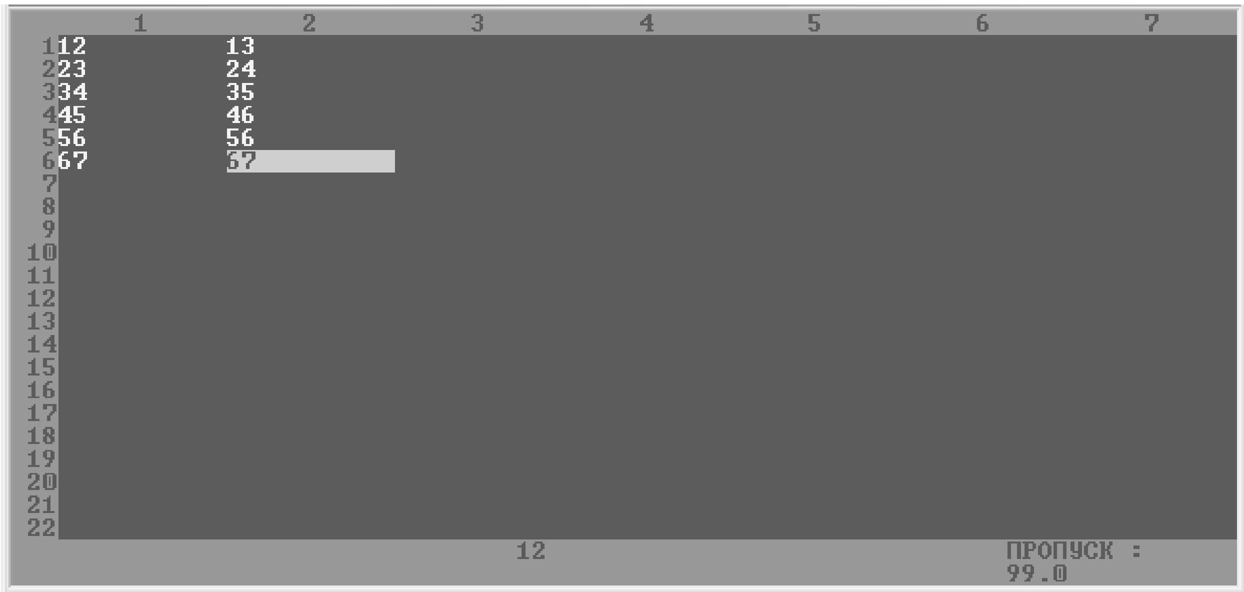
- расширенная – так же можно получить нажав F1, а затем Esc.

1. **Редактор**. После выбора этого пункта появляется вопрос: "Ввод метки пропуска" и предлагается вариант *9999.* Есть возможность оставить этот вариант нажатием кнопки Enter, либо набрать свой вариант метки пропуска, например *0000* и далее нажать Enter.

Метка пропуска выбирается для того, чтобы во время набора первичных экспериментальных данных в том месте, где отсутствует цифровая информация количественного или качественного показателя можно было не *теряя информации об исследуемом объекте безболезненно пропустить отсутствующий показатель. В пустое место ставится выбранная вами метка пропуска. Например, испытуемый выполнил все предлагаемые тесты по физической подготовленности, кроме подтягивания. Что бы не потерять информацию об этом испытуемом, мы вводим все его показатели, а в столбец "подтягивание" вводим метку пропуска.*



После ввода метки пропуска появляется запрос куда сохранять набранную информацию . Например: A:\CHKSH\SAN1.DAT. Это значит, что информация сохранится на дискете в директорию CHKSH в файл под именем SAN1.DAT. После этого попадаем в табличный редактор.

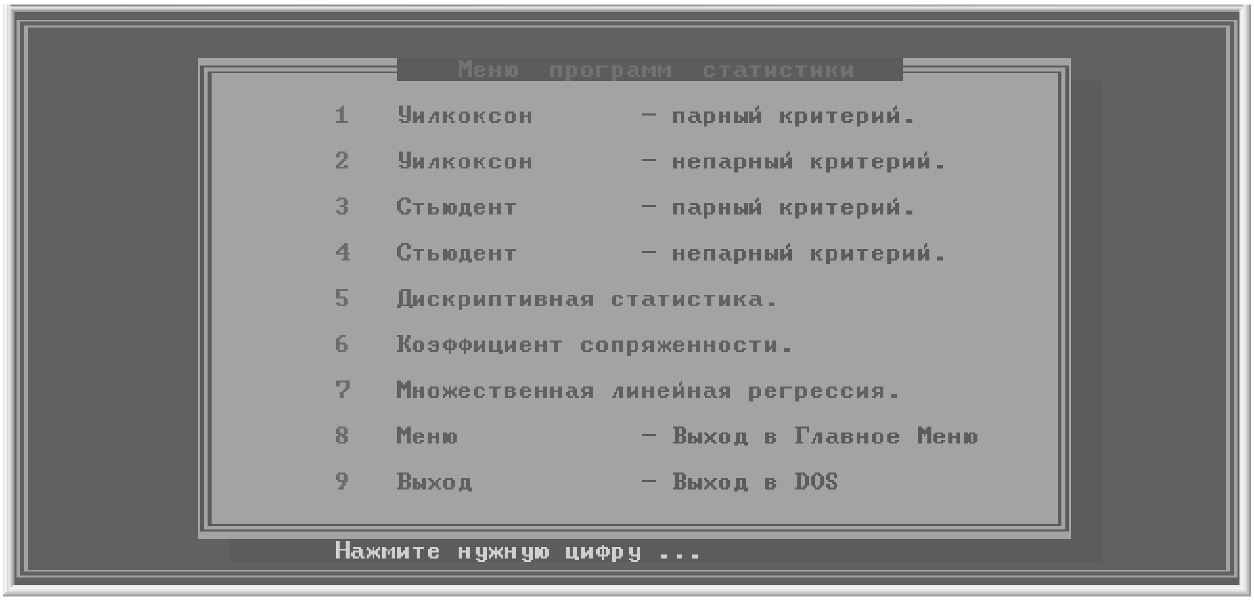


Заполнение таблицы экспериментальными данными.

С клавиатуры последовательно вводятся экспериментальные данные. Для изменения значения какой-либо ячейки необходимо установить на эту ячейку курсор и ввести новое значение.

Примечание. *Во время работы в "Редакторе", при сохранении нового файла в его названии необходимо добавлять расширение* ***dat.*** *Это связано с особенностями данной программы.*

2. **Статистика**



Следующим этапом работы должна стать "Дескриптивная (описательная) статистика".

Далее следует пройти ряд этапов:

а) Выбрать режим работы: *Столбец (Y/N)? [Y]* Если данные необходимо обработать по столбцам, выбираете Y, если по строкам – N;

б) *У вас есть принтер? (Y/N) [Y]*;

в) *Нормировать массив? (Y/N) [Y]*;

г) *Гистограмма автоматическая? (Y/N) [Y]* Если есть необходимость выбора определенного количества интервалов, то надо нажать N;

д) *Пропуск* – Здесь указывается метка пропуска, которая вводилась в табличной части;

е) Этим действием выбирается файл в котором содержаться данные.

Работа в остальных разделах аналогична вышеприведенному алгоритму.