На правах рукописи

Антипина Екатерина Дмитриевна

Математическое моделирование нелинейных динамических систем с векторным входом в теплоэнергетике (численные методы, алгоритмы)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Иркутск-2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Иркутский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ИГУ»)

Научный руководитель:	**Солодуша Светлана Витальевна** доктор технических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, отдел прикладной математики, главный научный сотрудник
Официальные оппоненты:	**Манакова Наталья Александровна** доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)», кафедра «Уравнения математической физики», заведующий кафедрой
	Тында Александр Николаевич кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный университет», факультет вычислительной техники, кафедра «Высшая и прикладная математика», заведующий кафедрой
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург

Защита состоится «23» декабря 2025 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета 24.2.279.01 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова» по адресу: 670000, Россия, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, д. 24а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова» и на сайте:
https://www.bsu.ru/content/disser/980/dissertaciya-antipinoi-e.d..pdf

Автореферат разослан «_____» ____________ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.279.01,
кандидат физико-математических наук, доцент _______________ Дармаев Тумэн Гомбоцыренович

Общая характеристика работы

Актуальность исследования. В настоящее время актуальны математические модели, описывающие процессы в эмерджентных динамических системах. Для многих таких систем математическая модель, представимая в виде совокупности дифференциальных, интегро-дифференциальных или интегральных уравнений с алгебраическими связями, является важнейшим инструментом научных исследований. Многообразие динамических систем в энергетике, в том числе разнонаправленность задач моделирования, включающих апостериорную диагностику, прогнозирование, а также разработку систем контроля и управления, предопределяет неизменный интерес к развитию математического моделирования нелинейных динамических систем типа «вход-выход».

Актуальность темы исследования подчеркивается важностью прикладных задач, связанных с моделированием и идентификацией нелинейной динамики технических объектов энергетики. В частности, в условиях, когда основу энергетики Российской Федерации составляют тепловые электрические станции, а темпы обновления их фондов остаются низкими, особую значимость приобретает разработка и применение эффективных численных методов. Эти методы позволяют не только упростить сложные математические модели, разработанные ранее, но и обеспечить высокую точность и быстродействие при решении задач, связанных с управлением и оптимизацией режимов функционирования энергетических систем.

Интегральные модели, представленные в диссертационной работе, основаны на использовании интегро-степенных рядов Вольтерра, пристальное внимание к которым в научных публикациях обусловлено разносторонними исследованиями: от прикладных задач в сфере машинного обучения до теоретических – в области математического моделирования. В условиях нестационарности динамических процессов, когда $x(t)$, $y(t)$ – скалярный вход и выход соответственно, зависящие от времени t, нелинейный характер связи выхода $y(t)$ и входа $x(t)$ определяется как

$$y(t) = P[x(t)] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \dots \int_{t_0}^{t} K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^{n} x(s_k) ds_k, \; t \in [t_0, T]. \tag{В.1}$$

Здесь оператор $P[x(t)]$ – причинный (или вольтерровый). Подынтегральную функцию K_n называют ядром Вольтерра. Полагаем, что свойства динамической системы неизменны за временно́й промежуток $[t_0, T]$. Тогда ядра Вольтерра (переходные характеристики динамической системы) зависят лишь от разности аргументов $t - s_k$, $k = \overline{1, n}$, следовательно, вместо (B.1) имеем

$$\hat{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{t} \widehat{K}_n(s_1, \ldots, s_n) \prod_{k=1}^{n} x(t - s_k) ds_k, \ t \in [t_0, T], \tag{B.2}$$

где ядра $\widehat{K}_n$ симметричны по всем переменным.

Несмотря на большое прикладное значение данного математического аппарата и множество разработанных методов применения (B.1), (B.2) для моделирования нелинейной динамики во временно́й области, остается немало нерешенных задач. Это сопряжено с появлением новых технических возможностей и возросшими требованиями к точности численного решения динамической задачи и к быстродействию алгоритмов в «реальном масштабе времени», а также со сложностью решения обратных задач (идентификации ядер Вольтерра в (B.1), (B.2) и входного сигнала $x(t)$, обеспечивающего требуемый отклик динамической системы $y(t)$).

Актуальность исследований диссертационной работы определяется новыми классами многомерных интегральных уравнений Вольтерра I рода, используемых для построения динамических моделей, модификацией численных методов решения обратных задач восстановления переходных характеристик и входных сигналов, а также применением эффективных вычислительных алгоритмов в задаче моделирования динамики теплотехнического оборудования.

Степень изученности и разработанности проблемы.

Обратные задачи математической физики, возникающие при математическом моделировании динамики теплофизических объектов, относятся к некорректно поставленным задачам. Основы этого направления были заложены в классических работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и В.К. Иванова, а также их учеников и последователей. Отметим наиболее близких к теме диссертационной работе авторов: А.Л. Агеев, В.В. Васин, А.С. Апарцин, А.Б. Бакушинский, А.А. Асанов, М.В. Булатов, А.Л. Бухгейм, М.В. Клибанов, Ю.Е. Воскобойников, А.М. Денисов, В.С. Сизиков, W. Gear, P.K. Lamm.

Применение таких важных инструментов в задаче моделирования нелинейной динамики, как интегро-степенные ряды Вольтерра, рассматривалось В.А. Вениковым и О.А. Сухановым, А.М. Дейчем, В.Д. Павленко, Ю.С. Попковым, К.А. Пупковым, В.А. Капалиным, Н.А. Магницким, S.A. Belbas, W. Greblicki, V.Z. Marmarelis, H.L. Van Trees и др.

Существенную роль при описании динамических систем играют линейные уравнения вольтерровского типа с двумя переменными пределами интегрирования. Данный класс «неклассических» интегральных уравнений связан с задачей идентификации ядер Вольтерра. Качественным анализом и поисками численного решения этих уравнений занимались А.С. Апарцин, А.А. Асанов и М.И. Иманалиев, В.А. Боева и Ю.Е. Воскобойников, М.Н. Ботороева и М.В. Булатов, И.В. Бойков, И.В. Сидлер, Д.Н. Сидоров, С.В. Солодуша, А.Н. Тында, Р.Г. Флейк, Ю.П. Яценко и др. Исследованиям полиномиальных уравнений Вольтерра I рода и их систем посвящены работы А.С. Апарцина, Е.В. Марковой и М.В. Булатова, С.В. Солодуши и В.А. Спиряева, Д.Н. Сидорова и Н.А. Сидорова, S.A. Belbas и Yu. Bulka и др.

К настоящему времени теория указанных классов уравнений недостаточно развита. В диссертации рассматриваются новые виды уравнений Вольтерра I рода и их систем, возникающие в задачах непараметрической идентификации нелинейной динамики во временно́й области.

Цель работы. Данное исследование ориентировано на применение нового подхода к моделированию нелинейной динамики систем с векторным входом для исследования теплофизических процессов в условиях неполной априорной информации. Ключевая идея состоит в построении математических моделей на основе допустимого семейства тестовых сигналов из класса кусочно-линейных функций. В основе верификации данного подхода лежит использование реальных параметров эксплуатационных режимов теплотехнических объектов.

Основные **задачи** исследования диссертационной работы:

1. Сравнительный анализ подходов к описанию и прогнозированию нелинейной динамики систем типа «вход-выход» с акцентом на обратные задачи непараметрической идентификации в условиях неполной априорной информации. Развитие методики построения математических моделей на основе новых классов уравнений Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования и привлечением квадратурных численных методов, обладающих свойством саморегуляризации.

2. Модификация методов приближенного решения линейных многомерных уравнений Вольтерра I рода с предысторией в задаче идентификации несимметричных ядер.

3. Исследование разрешимости разностных схем для систем линейных

алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающих в задаче идентификации ядер Вольтерра. Качественный анализ нелинейных систем интегральных уравнений вольтерровского типа, связанных с задачей восстановления векторного входного сигнала.

4. Создание программного обеспечения для модификации существующего подхода численного моделирования, анализ области применимости разработанных вычислительных алгоритмов.

5. Апробация созданных методик и программных средств с целью численного моделирования откликов объектов теплоэнергетики. В качестве выходных сигналов рассмотрены: изменение энтальпии в элементе теплообменного аппарата, а также изменения температуры и давления в конденсаторе и подогревателе низкого давления пароводяного тракта энергоблока Назаровской ГРЭС мощностью 135 МВт.

Объектом исследования в диссертационной работе являются новые классы уравнений Вольтерра I рода в задаче непараметрической идентификации математических моделей и алгоритмы автоматического регулирования динамики теплотехнических объектов на примере цифровой тени крупной электроэнергетической системы в условиях неполной априорной информации.

Предметом исследований являются численные методы, вычислительные алгоритмы, программное обеспечение для решения задач непараметрической идентификации и моделирования нелинейной динамики элементов теплоэнергетических установок, основанные на применении интегральных уравнений вольтерровского типа.

Методология и методы исследования. Численное моделирование динамики детерминированных устройств теплоэнергетики выполнено на основе теории интегральных и дифференциальных уравнений, функционального анализа, методов вычислительной математики. Изучение качественных свойств вычислительных алгоритмов проводилось в рамках теории условно-корректных задач, методов линейной алгебры, математического анализа и комбинаторики. Технология математического моделирования опиралась на основы методов компьютерного моделирования, системный анализ, статистические методы анализа данных.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложен подход к построению разностных аналогов интегральных моделей на основе новых классов интегральных уравнений Вольтерра I рода и устойчивых численных методов, направленных на создание инструментария

для построения математических моделей.

2. Модифицированы методы приближенного решения линейных многомерных уравнений вольтерровского типа с предысторией для задач идентификации ядер.

3. Дополнен и развит инструментарий численных методов решения СЛАУ при идентификации квадратичных полиномов Вольтерра в случае кусочно-линейных входных сигналов. Исследована разрешимость нелинейных систем, возникающих в задаче восстановления векторного сигнала.

4. Создано программное обеспечение для модифицированных подходов к численному моделированию нелинейной динамики в условиях векторного входного сигнала, выявлены области применения предложенных вычислительных алгоритмов.

5. Выявлена эффективность разработанных численных методов и алгоритмов, реализованных в виде модифицированного ПВК «Динамика» для моделирования нестационарной динамики изменения энтальпии на выходе в элементе теплообменного аппарата, а также изменений температуры и давления в выделенном локальном участке теплотехнического оборудования энергоблока Назаровской ГРЭС.

Научная новизна полученных результатов работы основана на модификации и развитии методов и моделей описания нелинейной динамики с опорой на интегральные уравнения вольтерровского типа:

1. Усовершенствован метод моделирования нестационарной динамики, базирующийся на устойчивых алгоритмах идентификации нелинейных детерминированных систем с неполной априорной информацией. Ключевое отличие состоит в привлечении новых классов уравнений Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования при учете технических особенностей теплофизических устройств.

2. Модифицированы численные методы решения линейных многомерных уравнений вольтерровского типа в задаче идентификации стационарных несимметричных ядер с учетом запаздывания измерений в зарегистрированном сигнале. Выполнено обобщение приближенных методов решения одномерных интегральных уравнений Вольтерра I рода с предысторией на многомерный случай.

3. Впервые выделены и исследованы специальные типы СЛАУ в задаче численной идентификации квадратичного полинома Вольтерра в случае кусочно-линейных тестовых сигналов. Доказаны новые теоремы о разрешимости задачи восстановления векторного входного сигнала для нелинейных

систем интегральных уравнений Вольтерра I рода, формирование которых выполнено с учетом размерности отклика динамического объекта.

4. Реализованы предложенные вычислительные алгоритмы для модификации программно-вычислительного комплекса (ПВК) «Динамика» в виде модулей непараметрической идентификации ядер Вольтерра. Выделены новые области применимости предлагаемых алгоритмов в задаче моделирования динамики элемента теплообменной установки.

5. Предложенные методики и программное обеспечение были апробированы на тестовых примерах в рамках численного моделирования нелинейной динамики теплотехнического оборудования крупной электроэнергетической системы в случае векторного входного сигнала.

Теоретическая значимость. В диссертационной работе теоретически развита технология идентификации математической модели типа «вход-выход» для нелинейных динамических систем, допускающих тестовые входные сигналы из класса кусочно-линейных функций (доказательство невырожденности СЛАУ, исследование качественных свойств численных решений новых классов уравнений Вольтерра I рода). Выделен новый класс нелинейных интегральных моделей на базе полиномиальных уравнений Вольтерра I рода, связанных с задачей идентификации входных сигналов, обеспечивающих при заданных переходных характеристиках требуемый выходной сигнал. Предложенные подходы предоставляют единый универсальный аппарат непараметрической идентификации нестационарных динамических объектов с векторным входом.

Практическая значимость.

1. Полученные в работе результаты вносят значимый вклад в теорию и методы математического моделирования нелинейной динамики систем типа «вход-выход» на основе нестационарных полиномов Вольтерра в случае векторных входных сигналов. Созданные универсальные методы построения интегральных моделей учитывают технические особенности объектов теплоэнергетики и базируются на физически реализуемых тестовых входных сигналах из класса кусочно-линейных функций.

2. Разработанные численные схемы решения новых классов интегральных уравнений Вольтерра I рода на основе кусочно-линейных сигналов с помощью метода Product Integration имеют превосходство по скорости сходимости в сравнении с классическими методами второго порядка точности.

3. Предложенная интегральная модель в задаче идентификации входных сигналов, основанная на комбинации полиномов различного порядка, позво-

ляет использовать отклики динамической системы, имеющие единую физическую природу.

4. Реализованные алгоритмы и программное обеспечение могут служить основой для создания автоматизированных компьютерных систем для моделирования нелинейной динамики теплообменного аппарата и оборудования локального участка пароводяного тракта энергоблока Назаровской ГРЭС. Созданное программное обеспечение встроено в модифицированную версию ПВК «Динамика» для численного моделирования нелинейной динамики широкого класса технических систем.

Обоснованность и достоверность результатов диссертации. Корректность полученных результатов подтверждается использованием элементов теории математического моделирования и системного анализа, а также соответствующими математическими выкладками и выводами, сформулированными в виде теорем. Достоверность разработанного математического инструментария подтверждается адекватностью используемых в работе динамических закономерностей предметной области, верификацией при решении модельных задач и при расчетах с экспериментальными данными, полученными различными исследовательскими группами, в том числе в ИСЭМ СО РАН.

Соответствие паспорту специальности. Выносимые на защиту положения соответствуют следующим пунктам паспорта научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

Пункт 1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (физико-математические науки) (положения № 1, 2 диссертационной работы).

Пункт 2. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (положение № 3 диссертационной работы).

Пункт 3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (положения № 4, 5 диссертационной работы).

В диссертации присутствуют оригинальные результаты из трех областей:

1. Математическое моделирование. Созданы математические модели элементов пароводяного тракта Назаровской ГРЭС в случае векторного входного сигнала, состоящего из расходов воды и пара на входе в конденсатор и подогреватель низкого давления. Разработан новый математический метод

построения моделей нестационарных динамических процессов в виде квадратичных полиномов Вольтерра на основе векторных входных сигналов из класса кусочно-линейных функций. В задаче восстановления входных сигналов предложен набор тестовых моделей на основе систем полиномиальных уравнений Вольтерра с использованием априорной информации о скалярности выходного сигнала.

2. Численные методы. Предложен подход для поиска численного решения многомерных интегральных уравнений, который развивает классический метод шагов, разработанный для одномерного случая. Для новых классов уравнений осуществляется поиск численного решения с использованием квадратурных методов второго порядка (метод средних прямоугольников) и метода типа Рунге-Кутта, имеющего третий порядок.

3. Комплексы программ. Предложен и реализован быстродействующий программный комплекс, включающий универсальный алгоритм идентификации несимметричных ядер Вольтерра. Метод построения интегральных моделей учитывает зашумленость входных сигналов. Верификация результатов имитационного моделирования теплообменных процессов основана на числовых значениях параметров теплообменных процессов цифровой тени энергоблока Назаровской ГРЭС. Проведены вычислительные эксперименты на основе имитационной модели элемента теплообменной установки.

Апробация результатов работы. Полученные в ходе выполнения диссертационной работы результаты обсуждались на научных конференциях и семинарах:

- всероссийские конференции: «Системные исследования в энергетике – 2019» (г. Иркутск, 2019); «Энергетика XXI века: устойчивое развитие и интеллектуальное управление» (г. Иркутск, 2020); «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (г. Пенза, 2024); «Неустойчивые задачи вычислительной математики» (г. Иркутск, 2022, 2024);

- международные конференции: «Математика, её приложения и математическое образование» (г. Улан-Удэ, 2020, 2023); «Актуальные вопросы архитектуры и строительства», посвященная 90-летию НГАСУ (г. Новосибирск, 2020); «Марчуковские научные чтения 2020» (МНЧ-2020), посвященная 95-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука (г. Новосибирск, 2020); «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (г. Иркутск, 2021, 2022); «Computer Science and Information Technologies» (Yerevan, Armenia, 2021); «Теория оптимального управления и приложения» (г. Екатеринбург, 2022); «XXXIII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (г. Симферополь, 2022);

- научные семинары: семинар отдела «Некорректные задачи анализа и приложений» ФГБУН Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН) (г. Екатеринбург, 2024), семинар отдела «Прикладная математика» ФГБУН Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИСЭМ СО РАН) (г. Иркутск, 2024), семинар Института математики, физики и компьютерных наук (ИМФКН) ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова» (г. Улан-Удэ, 2025).

Результаты диссертационной работы и материалы исследований получены при поддержке грантов РНФ № 22-21-00409, № 22-11-00173. Практические результаты использованы при реализации проектов по государственному заданию (проекты: № AAAA-A17-117030310442-8, № AAAA-A21-121012090034-3), что подтверждено соответствующим актом об использовании результатов диссертации.

Публикации по теме диссертационного исследования. Основное содержание диссертации опубликовано в 14 научных статьях, из них 3 статьи – в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ по специальности 1.2.2.; 7 – в трудах конференций, индексируемых в базах WoS/Scopus; 4 – в иных изданиях. На компьютерные программы, используемые в вычислительных экспериментах в рамках диссертационного исследования, получено 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников и двух приложений. Основной текст диссертационной работы содержит 142 страницы, 18 рисунков и 13 таблиц. Список литературы содержит 173 источника. В приложениях приведены свидетельства о регистрации программ (приложение А), акт о внедрении результатов диссертационного исследования (приложение Б).

Личный вклад. Текст диссертации не содержит заимствований без ссылок на первоисточники, а также результатов, полученных в соавторстве без упоминания авторов. В работах, опубликованных в соавторстве, соискателю принадлежит разработка вычисленных методов, реализация численных алгоритмов в виде программ для ЭВМ и верификация разработанного программного обеспечения, а также выполнение вычислительных экспериментов в приложениях. Вклад автора в подготовку статей в соавторстве оценивается как весомый. Теоретические результаты, связанные с полиномиальными интегральными уравнениями, получены совместно с С.В. Солодушей. В исследованиях, выполненных совместно с Ю.Е. Воскобойниковым и В.А. Боевой, автор проводил вычислительные работы по применению сглаживающих кубических сплайнов. В совместных работах с Э.А. Таировым, В.А. Спиряевым, Е.В. Марковой автор провел реализацию вычислительного эксперимента и верификацию результатов моделирования динамики участка пароводяного тракта энергоблока Назаровской ГРЭС. Формулировки и доказательства теорем, приведенные в диссертации, принадлежат соискателю. Конфликт интересов с соавторами отсутствует. Реализация ПВК «Численное решение одномерного интегрального уравнения в задаче идентификации ядер Вольтерра на базе кусочно-линейных тестовых сигналов», «Численное решение двумерного интегрального уравнения Вольтерра I рода относительно несимметричного ядра методом Рунге-Кутта» выполнена автором лично.

Основное содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования. Перечислены положения, выносимые на защиту, обозначена научная новизна работы, где выделены как ее теоретическая, так и практическая ценность. Представлены методология и методы исследования, приведены данные по апробации результатов.

Первая глава носит обзорно-постановочный характер.

Пункт 1.1 посвящен специфике обратных задач. Отмечаются сложности процесса непараметрической идентификации и необходимость разработки специальных методов, учитывающих сложность некорректных задач математической физики.

В пункте 1.2 дан обзор применения полиномов Вольтерра

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_n \le p} f_{i_1,\ldots,i_n}(t). \tag{1}$$

Функции

$$f_{i_1,\dots,i_n}(t) = \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t K_{i_1,\dots,i_n}(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^{n} x_k(s_k)\, \mathrm{d}s_k, \tag{2}$$

отражают вклад изменений компонент вектора $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t))^T$ в отклик $y(t)$ системы. В (1) $t \in [t_0, T]$, $t_0 = 0$, $y(t)$ – скалярный отклик динамической системы, t – время, в (2) функции $K_{i_1,\dots,i_n}$ – симметричные по $s_1, \dots, s_n$ ядра Вольтерра при совпадающих индексах $i_1, \dots, i_n$, индекс T означает транспонирование. Обосновывается актуальность исследования динамики нестационарных систем с векторным входом. Формализуются три ключевые задачи, решаемые на основе теории рядов Вольтерра: обратные задачи – идентификация ядер и восстановление входных сигналов, а также прямая задача – моделирование отклика на заданный входной сигнал.

Пункт 1.3 посвящен постановке **задачи идентификации ядер Вольтерра** с использованием тестовых сигналов кусочно-линейного и кусочно-постоянного типов. При $N = 1$ и $p = 1$ в (1), (2) задача идентификации ядра $K(t, s)$ может быть сведена для сигналов кусочно-линейного вида

$$x(t) \equiv x_\nu(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ \dfrac{t}{\nu}, & 0 < t \le \nu, \\ 1, & \nu \le t, \end{cases}$$

к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$\int\limits_0^\nu K(t, s) \frac{s}{\nu} ds + \int\limits_\nu^t K(t, s) ds = g(t, \nu). \tag{3}$$

Для $N = 2$, $p = 2$ в стационарном случае (2) задача идентификации $K_{12}(s_1, s_2)$, характеризующей изменение обоих компонент вектора $x(t)$, редуцируется с помощью однопараметрических семейств входных сигналов

$$\begin{cases} x_{1_\nu}(t) = \begin{cases} 0, \ \nu = 0, \\ \frac{t}{\nu}, \ 0 < t \le \nu, \\ 0, \ \nu < t \le T, \end{cases} \\ x_{2_\nu}(t) = \mathrm{e}(t - \nu), \ 0 \le \nu \le t \le T, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x_{1_\nu}(t) = \mathrm{e}(t-\nu), \ 0 \le \nu \le t \le T, \\
x_{2_\nu}(t) = \begin{cases} 0, \ \nu = 0, \\ \frac{t}{\nu}, \ 0 < t \le \nu, \\ 0, \ \nu < t \le T, \end{cases}
\end{cases}
$$

где $\mathrm{e}(t)$ – функция Хевисайда, к решению парного интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{t-\nu}^{t} ds_1 \int\limits_{0}^{t-\nu} \frac{t-s_1}{\nu} K_{12}(s_1,s_2) ds_2 = \overset{(1)}{f}_{12}(t,\nu), \\
\int\limits_{t-\nu}^{t} ds_2 \int\limits_{0}^{t-\nu} \frac{t-s_2}{\nu} K_{12}(s_1,s_2) ds_1 = \overset{(2)}{f}_{12}(t,\nu), \quad t \in [0,T].
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Использование двух серий сигналов кусочно-постоянного типа минимальной длительностью h вида

$$
\begin{cases}
x_1(t) = \mathrm{e}(t) - \mathrm{e}(t-h), \\
x_{2_\nu}(t) = \mathrm{e}(t-\nu) - \mathrm{e}(t-\nu-h), \ \ t \in [0,T],
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x_{1_\nu}(t) = \mathrm{e}(t-\nu) - \mathrm{e}(t-\nu-h), \\
x_2(t) = \mathrm{e}(t) - \mathrm{e}(t-h), \ \ t \in [0,T],
\end{cases}
$$

в данной задаче позволяет получить другой тип интегрального уравнения Вольтерра I рода относительно $K_{12}(s_1,s_2)$:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{t-h}^{t} ds_1 \int\limits_{t-\nu-h}^{t-\nu} K_{12}(s_1,s_2) ds_2 = \overset{(1)}{f}_{12}(t,\nu), \\
\int\limits_{t-\nu-h}^{t-\nu} ds_1 \int\limits_{t-h}^{t} K_{12}(s_1,s_2) ds_2 = \overset{(2)}{f}_{12}(t,\nu),
\end{gathered}
\tag{5}
$$

где $t \in [h,T]$, $\nu \in [0,T-h]$, $\nu + h \le t$.

Рассматриваются методы приближенного решения интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными верхним и нижним пределами на основе метода шагов. Обосновывается преимущество использования кусочно-линейных сигналов, соответствующих физическим требованиям реализации, благодаря наличию фронта нарастания.

Пункт 1.4 посвящен **задаче восстановления входных сигналов** по заданным ядрам Вольтерра и желаемому отклику системы. Введена система полиномиальных уравнений Вольтерра I рода для векторного входа и выхода. Представленный подход применялся в работе для решения практической задачи идентификации отклонений расхода воды и пара на участке пароводяного тракта энергоблока крупной электроэнергетической системы.

Пункт 1.5 посвящен математическому моделированию динамики теплофизических процессов в энергетических системах. Описаны содержательные физические модели элементов теплообменного оборудования (эталонные математические модели). Приведены уравнения изменения энтальпии на выходе из элемента теплообменной установки и уравнения, описывающие работу конденсатора и подогревателя низкого давления на участке пароводяного тракта энергоблока Назаровской ГРЭС. Даны основные принципы формирования математических моделей динамики теплообменных процессов на основе законов сохранения и замыкающих соотношений.

Во **второй** главе модифицированы и применены численные методы для решения задач идентификации ядер Вольтерра и восстановления входных сигналов. Для фильтрации данных адаптирован метод, основанный на сглаживающих кубических сплайнах (СКС). Численные эксперименты подтвердили эффективность используемых методов для задач идентификации параметров теплоэнергетических установок.

Пункт 2.1 посвящен применению численных методов для решения задачи идентификации ядер Вольтерра в уравнениях с двумя переменными пределами интегрирования. Основное внимание уделено двум аспектам: 1) построению нестационарной интегральной модели в скалярном случае, 2) построению стационарной модели в виде квадратичного и кубического полиномов Вольтерра с векторными входными сигналами.

Для скалярного случая введены равномерные сетки:

$$t_i = ih,\ i = \overline{1,n},\ n = \left[\frac{T}{h}\right],\ \ t_{j-\frac{1}{2}} = \left(j - \frac{1}{2}\right)h,\ j = \overline{1,i}.$$

Применение метода средних прямоугольников к уравнению (3) позволило получить СЛАУ:

$$h\sum_{l=1}^{j} \frac{l-\frac{1}{2}}{j} K^h(t_i, t_{l-\frac{1}{2}}) + h\sum_{l=j+1}^{i} K^h(t_i, t_{l-\frac{1}{2}}) = g(t_i, t_j), \tag{6}$$

$$i > j,\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, i-1}.$$

В случае $t_i = t_j$ (при $i = j$) сеточный аналог уравнения (3) имеет вид:

$$h \sum_{l=1}^{i} \frac{l - \frac{1}{2}}{i} K^h(t_i, t_{l-\frac{1}{2}}) = g(t_i, t_i),\ i = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Автором сформулированы и доказаны теоремы о разрешимости СЛАУ (6), (7) и о скорости сходимости численного метода.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть в задаче* (6), (7) *матрица коэффициентов имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix},$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2i} & \frac{3}{2i} & \frac{5}{2i} & \dots & \frac{2i-1}{2i} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда система

$$AK^h = G,$$

где

$$K^h = \left(K^h_{1,\frac{1}{2}}, K^h_{2,\frac{1}{2}}, K^h_{2,\frac{3}{2}}, K^h_{3,\frac{1}{2}}, \dots, K^h_{n,\frac{2n-1}{2}} \right)^T,$$

$$G = \left(\frac{1}{h} g^h_{1,1}, \frac{1}{h} g^h_{2,1}, \frac{1}{h} g^h_{2,2}, \frac{1}{h} g^h_{3,1}, \dots, \frac{1}{h} g^h_{n,n} \right)^T,$$

имеет единственное решение, представимое в виде

$$K^h(t_i, t_{i-\frac{1}{2}}) = -\frac{2(i-1)}{h} g(t_i, t_{i-1}) + \frac{2i}{h} g(t_i, t_i),\ \ i = j,$$

$$K^h(t_i, t_{j-\frac{1}{2}}) = -\frac{2(j-1)}{h} g(t_i, t_{j-1}) + \frac{6j}{h} g(t_i, t_j) - \frac{4i}{h} g(t_i, t_i),\ \ i = j+1,$$

$$K^h(t_i, t_{j-\frac{1}{2}}) = -\frac{2(j-1)}{h} g(t_i, t_{j-1}) + \frac{6j}{h} g(t_i, t_j) +$$

$$+\frac{8}{h}\sum_{l=j+1}^{i-1}(-1)^{l+j}l\cdot g(t_i,t_l)+\frac{4i\cdot(-1)^{i+j}}{h}g(t_i,t_i),\ \ i\geq j+2.$$

Исследование сходимости схемы (7) показало, что метод имеет первый порядок точности при выполнении условий $K(t,\nu)\in C^{(1)}$, $g(t,\nu)\in C_{\Delta}^{(1)}$, $g(t,\nu)\in C_{\Delta}^{(2)}$.

Для поиска численного решения (3) применен метод Product Integration, так что разностный аналог имеет вид

$$\frac{1}{j}\sum_{l=1}^{j}\left(l-\frac{1}{2}\right)m_{i,l}+\sum_{l=j+1}^{i}m_{i,l}=g(ih,jh),\quad j=\overline{1,i},\quad i=\overline{1,n}, \tag{8}$$

где неизвестные величины обозначены через $m_{i,j}$, т. е.

$$m_{i,l}=\int\limits_{(l-1)h}^{lh}K(ih,s)ds.$$

В пункте 2.1.1 автором была сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности решения (8).

Рассмотрен сеточный аналог (4) на основе метода Product Integration:

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=i-j+1}^{i}\sum_{k=1}^{i-j}\frac{i-l+\frac{1}{2}}{j}\int\limits_{(l-1)h}^{lh}ds_1\int\limits_{(k-1)h}^{kh}K_{12}(s_1,s_2)ds_2=\overset{(1)}{f_{12}}(t_i,t_j),\\
&\sum_{l=i-j+1}^{i}\sum_{k=1}^{i-j}\frac{i-l+\frac{1}{2}}{j}\int\limits_{(l-1)h}^{lh}ds_2\int\limits_{(k-1)h}^{kh}K_{12}(s_1,s_2)ds_1=\overset{(2)}{f_{12}}(t_i,t_j),
\end{aligned}\tag{9}$$

$i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,i}$. Автором доказана теорема о существовании и единственности решения (9).

Для построения численного решения парного интегрального уравнения (5) в пункте 2.1.2 применен метод типа Рунге-Кутта. Вводилась равномерная сетка с дополнительными узлами:

$$t_{ip}=t_i+\frac{ph}{m},\ p=\overline{1,m},\ \nu_{jp}=\nu_j+\frac{qh}{m}\ q=\overline{1,m}.$$

После применения метода получена СЛАУ

$$h^2\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}b_{kp}b_{lr}K_{12}^h(t_{i-1,k},t_{i-j-1,l})+h^2\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}b_{kp}a_{lr}K_{12}^h(t_{i-1,k},t_{i-j,l})+$$

$$+h^2\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}a_{kp}b_{lr}K_{12}^h(t_{i,k},t_{i-j-1,l})+h^2\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}a_{kp}a_{lr}K_{12}^h(t_{i,k},t_{i-j,l})=\overset{(1)}{f}_{12}(t_{ip},\nu_{jq}),$$

$$h^2\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}b_{kp}b_{lr}K_{12}^h(t_{i-j-1,k},t_{i-1,l})+h^2\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}b_{kp}a_{lr}K_{12}^h(t_{i-j-1,k},t_{i,l})+$$

$$+h^2\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}a_{kp}b_{lr}K_{12}^h(t_{i-j,k},t_{i-1,l})+$$

$$+h^2\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}a_{kp}a_{lr}K_{12}^h(t_{i-j,k},t_{i,l})=\overset{(2)}{f}_{12}(t_{ip},\nu_{jq}), \qquad (10)$$

где коэффициенты a, b определяются параметрами метода. СЛАУ (10) имеет высокую размерность $m^2n^2\times m^2n^2$, а скорость сходимости метода зависит от параметра m.

В задаче построения кубического полинома Вольтерра ($N=3$, $p=3$ в стационарном случае (2)) в пункте 2.1.3 рассмотрено уравнение

$$\int_0^t\int_0^t\int_0^t\varphi(s_1,s_2,s_3)x_1(t-s_1)x_2(t-s_2)x_3(t-s_3)ds_1ds_2ds_3=f(t) \qquad (11)$$

и шесть серий однопараметрических семейств сигналов, одна из которых имеет вид

$$\begin{cases}x_1(t)=\mathrm{e}(t)-\mathrm{e}(t-h),\\ x_{2_\nu}(t)=\mathrm{e}(t-\nu)-\mathrm{e}(t-\nu-h),\\ x_{3_\mu}(t)=\mathrm{e}(t-\mu)-\mathrm{e}(t-\mu-h).\end{cases} \qquad (12)$$

Область определения функции φ включает шесть подобластей $\Omega^{(i)}$, $i=\overline{1,6}$, которые формируют $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{6}\Omega^{(i)}$. В каждой подобласти выделено интегральное уравнение Вольтерра I рода. В частности, в подобласти $\Omega^{(1)}=\{s_1,s_2,s_3:0\le s_2\le s_3\le s_1\le T\}$ в результате подстановки (12) в (11) получено

$$\int_{t-h}^{t}ds_1\int_{t-\nu-h}^{t-\nu}ds_2\int_{t-\mu-h}^{t-\mu}\varphi(s_1,s_2,s_3)ds_3=\overset{(1)}{z}(t,\nu,\mu). \qquad (13)$$

Автором предложена модификация метода шагов для построения приближенного решения уравнений типа (13), которая включает проверку условий разрешимости, получение формул решения путем дифференцирования и выявление условий согласования для обеспечения непрерывности решения. Теоретические результаты сформулированы в виде теоремы (нумерация теоремы соответствует тексту диссертации).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^{N+1} \varphi^{(i)}$ *решение* (13) *на* $\Omega^{(1)}$ *с предысторией* $\varphi^{(0)}$, *непрерывной на* $\Omega_0(\mathbf{N})$, $\mathbf{N} \in \Delta_0$, *и пусть функция* $\overset{(1)}{z}$ *удовлетворяет условиям*

$$\mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} |_{\mathbf{N}(t,\nu,\mu)} \in C_{\Omega^{(1)}},$$

$$\mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} |_{\mathbf{N}(t,\nu,t-h)} = \varphi^{(0)}(t,t-\nu,h) - \varphi^{(0)}(t-h,t-\nu,h) - \varphi^{(0)}(t,t-\nu-h,h) +$$
$$+ \varphi^{(0)}(t-h,t-\nu-h,h) - \varphi^{(0)}(t,t-\nu,0) + \varphi^{(0)}(t-h,t-\nu,0) +$$
$$+ \varphi^{(0)}(t,t-\nu-h,0) - \varphi^{(0)}(t-h,t-\nu-h,0).$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi^{(0)}(t,t-\nu,h-\varepsilon) = \varphi^{(i)}(t,t-\nu,h),\ i=\overline{1,N+1},\ \mathbf{N}(t,\nu,t-h) \in \Delta_1,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi^{(i-1)}(t,t-\nu-\varepsilon,t-\mu-\varepsilon) = \varphi^{(i)}(t,t-\nu,t-\mu),\ i=\overline{2,N+1},\ \mathbf{N}(t,\nu,\mu) \in \Delta_i.$$

В формулировке теоремы 5 приняты обозначения:

$$\mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} = (\overset{(1)}{z})'''_{t\nu\mu} + (\overset{(1)}{z})'''_{\nu^2\mu} + (\overset{(1)}{z})'''_{\nu\mu^2},$$

$$\Delta_k = \{t,\nu,\mu:\ \nu+h \le t,\ \mu \le \nu,\ kh \le t < (k+1)h\},\ k=\overline{1,N-1},$$

$$\Delta_N = \{t,\nu,\mu:\ \nu+h \le t,\ \mu+h \le t,\ \mu \le \nu,\ t=Nh\},$$

$$\Delta_0 = \{t,\nu,\mu:\ D_1 \cup D_2,\ \nu \ge \mu \ge 0\},$$

$$D_1 = \{t,\nu,\mu: 0 \le \mu \le \nu \le t,\ 0 \le t < h,\ h > 0\},$$

$$D_2 = \{t,\nu,\mu: t-h \le \mu \le \nu \le t,\ h \le t \le T,\ h > 0\}.$$

Здесь Δ_0 совпадает с предысторией, а также

$$\bigcup_{k=1}^{N} \Delta_k = \{t,\nu,\mu:\ \nu+h \le t,\ \mu+h \le t,\ h \le t \le T,\ \nu \ge \mu \ge 0,\ h > 0\}.$$

Пункт 2.2 посвящен задаче идентификации векторного входного сигнала в квадратичных и кубических полиномах Вольтерра. Основное внимание уделяется случаям, когда отклики системы содержат погрешности измерений, что требует применения специальных методов фильтрации и аналитических подходов к решению нелинейных уравнений.

В пункте 2.2.1 использовался подход к восстановлению сигнала на основе сглаживающих кубических сплайнов, позволяющих минимизировать влияние шумов. Алгоритм выбора оптимального параметра сглаживания базируется на методе L-кривой. На примере модели участка пароводяного тракта энергоблока Назаровской ГРЭС показано, что предложенный подход снижает ошибку восстановления сигналов.

В пункте 2.2.2 выполнено исследование системы некоторых интегральных уравнений Вольтерра I рода. Для системы второго порядка

$$y_i(t) = \int\limits_0^t K_i(t)x(s)ds + Z[x]$$

с оператором

$$Z[x] = \int\limits_0^t \int\limits_0^t \left[\sum_{i=1}^{2} L_i(t,s_1,s_2)x_i(s_1)x_i(s_2) + L_{12}(t,s_1,s_2)x_1(s_1)x_2(s_2) \right] ds_1 ds_2,$$

где

$$L_i(t,s_1,s_2) = (0, K_{ii}(t))^T,\ L_{12}(t,s_1,s_2) = (0, K_{12}(t))^T,\ i = 1,2,$$

ядра Вольтерра $K_i(t) = (K_i^{(1)}(t), K_i^{(2)}(t))^T$, $K_{ji}(t)$ непрерывны и непрерывно-дифференцируемы по t, причем $K_i(t) \neq 0$, $K_{ji}(t) \neq 0$, $1 \leq j \leq i \leq 2$.

Основываясь на результатах Солодуши С.В.[1], в задаче восстановления одной компоненты векторного входного сигнала автором получено обобщение, сформулированное в виде теоремы, на случай, когда все компоненты входного вектора являются искомыми.

Для системы третьего порядка

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{2} \sum\limits_{1\leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq 2} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t K^{(1)}_{i_1\ldots i_l}(t) \prod\limits_{k=1}^{2} x_{i_l}(s_k)ds_k = y_1(t), \\ \sum\limits_{l=1}^{3} \sum\limits_{1\leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq 2} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t K^{(2)}_{i_1\ldots i_l}(t) \prod\limits_{k=1}^{3} x_{i_l}(s_k)ds_k = y_2(t). \end{cases}$$

[1] Солодуша, С.В. Моделирование систем автоматического управления на основе полиномов Вольтерра / С.В. Солодуша // МАИС. – 2012. – Т. 19, № 1. – С. 60–68.

соискателем предложен метод решения путем замены переменных и применения формулы Кардано.

Пункт 2.3 посвящен верификации и анализу результатов численных экспериментов, подтверждающих достоверность методов, разработанных в пунктах 2.1 и 2.2. Проведены вычислительные эксперименты для различных классов тестовых сигналов и реальных данных энергетической системы. Для (3) были получены оценки длины интервала, предложенный алгоритм был основан на применении метода Фибоначчи путем полного перебора.

Третья глава посвящена разработке программного обеспечения для моделирования динамических систем с использованием интегральных полиномов Вольтерра в составе программно-вычислительного комплекса «Динамика». Разработаны и реализованы специализированные вычислительные алгоритмы, включая модифицированные методы численного интегрирования и оригинальные схемы решения интегральных уравнений Вольтерра I рода. Эффективность предложенных методов подтверждена результатами моделирования динамики реальных энергетических систем.

Пункт 3.1 содержит обзор и анализ современных программно-вычислительных комплексов для моделирования динамических систем. Проведена классификация существующего программного обеспечения, включающего системы компьютерной математики, специализированные пакеты моделирования, универсальные системы визуального моделирования и авторские пакеты.

Пункт 3.2 посвящен развитию и модификации программно-вычислительного комплекса «Динамика». В работе предложено расширение функционала этого пакета за счет реализации трех новых вычислительных блоков, соответствующих методу средних прямоугольников, а также методам типа Рунге-Кутта и Product Integration. Для каждого метода разработаны блок-схемы алгоритмов соответствующих программных кодов. Представленные модификации позволяют расширить область применения комплекса «Динамика» для решения более широкого класса задач идентификации и моделирования нелинейных динамических систем в энергетике.

Пункт 3.3 посвящен моделированию динамики переходных процессов в крупных энергетических системах с использованием полиномов Вольтерра. Основное внимание уделено сравнению различных подходов к идентификации ядер Вольтерра и оптимизации параметров интегральных моделей.

Для комбинированной квадратичной модели, содержащей линейную нестационарную составляющую

$$y(t) = \int_0^t K_1(t,s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_{11}(s_1,s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1 ds_2, \qquad (14)$$

где $t \in [0,T]$, проведено сравнение двух подходов к идентификации ядра $K_1(t,s)$. Первый подход использует тестовые сигналы кусочно-постоянного вида, второй подход дополнительно включает кусочно-линейные сигналы.

Верификация результатов вычислительного эксперимента реализована на модельных примерах. В качестве критерия точности моделирования было выбрано значение коэффициента средней абсолютной ошибки:

$$MAE_r(t) = \frac{1}{B}\sum_{\beta=1}^{B} |n_r(t)|\,, \ \ r = 1,2, \ \ t \in [0,15],$$

где $\beta = 0,01k\alpha$, $k = \overline{1,B}$, $n_r(t)$ – разность откликов между эталонной и интегральной моделью, индекс r указывает на вид интегральной модели (14) ($r = 1$ – модель, построенная на сигналах кусочно-постоянного типа, $r = 2$ – на сигналах кусочно-линейного типа). На Рисунке 1 черным цветом выделены области выполнения неравенства $MAE_2(t) < MAE_1(t)$ при $B = 10, \ 25, \ 40$ с точностью $\delta = 10^{-2}$.

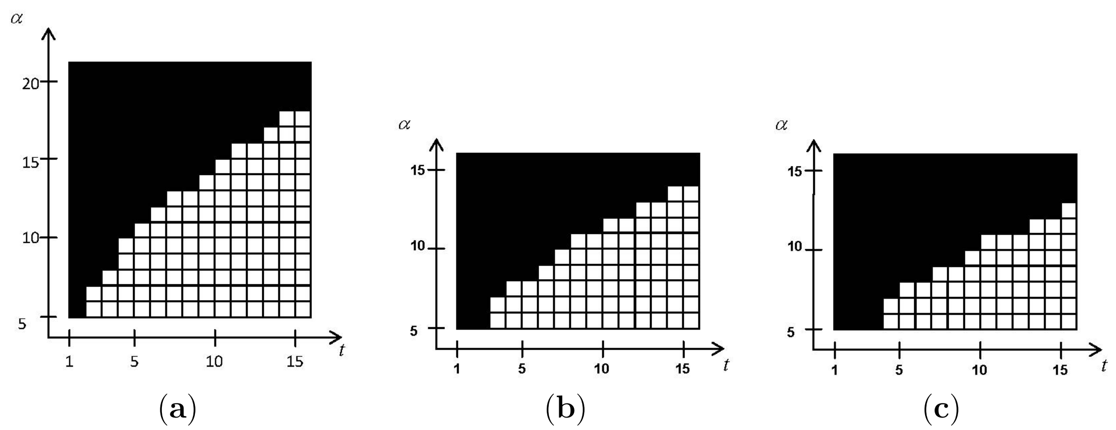

Рисунок 1 – Области выполнения неравенства $MAE_2(t) < MAE_1(t)$ при (**a**) $B = 10$, (**b**) $B = 25$ и (**c**) $B = 40$

Получено, что при фронте нарастания менее 10% от длины исследуемого интервала T эффективно использовать кусочно-постоянные тестовые сигналы. Данная оценка вполне соответствует общепринятым методам выбора параметров теплоносителя.

Для реального энергетического объекта выполнена оптимизация амплитуд входных возмущений. Рассмотрена экстремальная задача

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in [0,B]} \left\{ \max_{\beta \in [0,B]} |N(\alpha, \beta)| \right\},$$

где $N(\alpha, \beta)$ – невязка эталонной и интегральной моделей, α – амплитуда, которая использовалась в тестовых сигналах при построении квадратичной модели, β – амплитуда допустимого множества входных сигналов.

Получены оптимальные значения для амплитуд, которые укладываются в диапазон $0,75B – 0,9B$, приведенный в статье А.С. Апарцина, С.В. Солодуши[2].

Таким образом, в третьей главе получена приемлемая с практической точки зрения точность моделирования динамики оборудования локального участка пароводяного тракта крупного электроэнергетического объекта и хорошее соответствие верификации расчетов с известными результатами других исследователей.

Основные результаты работы

Ключевые результаты, представленные в диссертационной работе, являются оригинальными и обладают как теоретической, так и практической значимостью. В качестве основных результатов можно выделить следующие:

1. Разработан и теоретически обоснован новый подход к математическому моделированию нестационарной динамики сложных технических объектов. Подход основан на получении решения разностных аналогов для новых классов интегральных уравнений Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования. Доказаны теоремы о разрешимости соответствующих СЛАУ. Исследована сходимость разработанных устойчивых численных методов.

2. Предложены и исследованы модифицированные методы приближенного решения многомерных уравнений Вольтерра I рода, позволяющие идентифицировать несимметричные ядра с учетом запаздывания измерений входных сигналов. Данный подход был осуществлен с использованием метода шагов, развитого на многомерный случай.

3. Проведено исследование задачи восстановления векторного входного сигнала динамических объектов, описываемых нелинейными системами интегральных уравнений Вольтерра I рода с откликом, имеющим единый физи-

[2] Апарцин, А.С. Об оптимизации амплитуд тестовых сигналов при идентификации ядер Вольтерра / А.С. Апарцин, С.В. Солодуша // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 3. – С. 116–124.

ческий смысл. Доказаны теоремы разрешимости выделенных типов систем интегральных уравнений Вольтерра I рода с учетом размерности отклика динамического объекта. Для повышения устойчивости к погрешностям измерений применен фильтр на основе СКС, что позволило снизить погрешность восстановления входных сигналов на $3-5\%$, а выходных – на $5-8\%$.

4. Создано и апробировано программное обеспечение, реализующее разработанные алгоритмы в виде модулей для ПВК «Динамика». Проведенный анализ областей применимости и вычислительные эксперименты на реальных данных Назаровской ГРЭС позволили выделить оптимальные параметры использования методов (например, оптимальный шаг сетки, найденный методом Фибоначчи, и диапазон амплитуд тестовых воздействий для улучшения точности модели).

5. Проведена апробация разработанных методик и программного обеспечения в задаче моделирования нелинейной динамики теплотехнического оборудования. Показана эффективность предложенного подхода для моделирования динамики изменения энтальпии, температуры и давления в пароводяном тракте крупного энергетического объекта. Сравнительный анализ двух подходов (с кусочно-постоянными и кусочно-линейными тестовыми сигналами) позволил дать рекомендации по их применению в зависимости от характера входных воздействий.

Список опубликованных работ по теме диссертации

Публикации в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

1. Антипина, Е.Д. Формулы обращения для трехмерного интегрального уравнения Вольтерра I рода с предысторией / Е.Д. Антипина // Изв. ИГУ. Серия Математика. – 2022. – Т. 41. – С. 69–84 (Scopus, Q2).

2. Antipina, E.D. Identification of Quadratic Volterra Polynomials in the "Input–Output"Models of Nonlinear Systems / Yu. Voskoboinikov , S. Solodusha, E. Markova, E. Antipina, V. Boeva // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, № 11. – P. 1836 (Web of Science, Q1).

3. Антипина, Е.Д. О некоторых свойствах нелинейных интегральных моделей динамических процессов / С.В. Солодуша, Е.Д. Антипина // Информационные техн. и вычислительные системы. – 2024. – № 2. – С. 92–99 (Перечень ВАК, К1).

Публикации в научных изданиях, индексируемых Scopus и Web of Science

4. Antipina, E.D. Application of a Volterra quadratic polynomial to modeling elements of heat engineering devices / E.D. Antipina, V.A. Spiryaev, E.A. Tairov // E3S Web of Conf. – 2019. – Vol. 114. – P. 01007.

5. Antipina, E.D. Numerical solution the Volterra dual integral equation of the first kind based on a method of Runge-Kutta type / E.D. Antipina // 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. XIII International Scientific Conference Architecture and Construction 2020. Novosibirsk, 22-24 September 2020. – 2020. – Vol. 953. – P. 012064.

6. Antipina, E.D. On one approach to computer modeling of the dynamics of heat and power systems by the Volterra series method / E.D. Antipina, E.V. Markova, S.V. Solodusha // AIP Conf. Proc. Computer Science and Information Technologies CSIT 2021, Yerevan, 27 September – 1 October 2021. – 2021. – Vol. 2757(1). – P. 060001.

7. Antipina, E.D. Studying the complexity of identification of Volterra kernels for the case of a vector input signal of arbitrary dimension / E.D. Antipina, E.V. Markova, E.A. Tairov // E3S Web of Conf. ENERGY-21 – Sustainable Development and Smart Management: electronic edition. – 2020. – P. 03004.

8. Antipina, E.D. MIMO Volterra Models for Linear Automatic Control Systems / S.V. Solodusha, E.D. Antipina // 2023 Int. Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi. Publisher: IEEE. – 2023. – P. 117–121.

9. Antipina, E.D. Inversion formulas and their finite-dimensional analogs for multidimensional Volterra equations of the first kind / S. Solodusha, E. Antipina // J. Phys. Conf. Ser. – 2021. – Vol. 1715. – P. 012046.

10. Antipina, E.D. Identification of Integral Models of Nonlinear Dynamics by the Product Integration Method with Digital Signal Processing / S.V. Solodusha, V.A. Spiryaev, E.D. Antipina // 2023 Int. Conf. on Ind. Eng., Applications and Manufacturing (ICIEAM), Publisher: IEEE. – 2023. – P. 1064–1068.

Публикации в других изданиях

11. Антипина, Е.Д. Дискретизационный метод решения интегрального уравнения I рода типа Вольтерра / Е. Д. Антипина // Материалы Междунар. конф. «Теория оптимального управления и приложения» (ОСТА 2022). – Екатеринбург : ИММ УрО РАН. – 2022. – С. 12–15.

12. Антипина, Е.Д. К идентификации ядер Вольтерра в интегральных моделях линейных нестационарных динамических систем / С.В. Солодуша, Е.Д. Антипина // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН. – 2023. – Т. 224. – С. 125–132.

13. Антипина, Е.Д. Некоторый класс интегральных уравнений I рода в задаче идентификации ядер Вольтерра / Е. Д. Антипина // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем (МКМ-2024) : Сб. ст. по материалам XVIII Всерос. с междунар. уч. научно-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов, Пенза, 04–07 июня 2024 г. – Пенза : ПГУ. – 2024. – С. 73–79.

14. Антипина, Е.Д. Идентификация ядер Вольтерра в интегральных моделях динамических систем / Е.Д. Антипина // Неустойчивые задачи вычислительной математики: Материалы семинара с междунар. уч. им. А.С. Апарцина, Иркутск, 29 июля – 02 августа 2024 г. – Иркутск : ИГУ. – 2024. – С. 11–13.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

1. Антипина, Е.Д. Численное решение двумерного интегрального уравнения Вольтерра I рода относительно несимметричного ядра методом Рунге-Кутта / Е.Д. Антипина // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020617244. ФГБУН ИСЭМ СО РАН. – № 2020616207; заявл. 15.06.2020; опубл. 02.07.2020.

2. Антипина, Е.Д. Численное решение одномерного интегрального уравнения в задаче идентификации ядер Вольтерра на базе кусочно-линейных тестовых сигналов / Е.Д. Антипина // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022618264. ФГБУН ИСЭМ СО РАН. – № 2022617714; заявл. 28.04.2022; опубл. 05.05.2022.

3. Антипина, Е.Д. Непараметрическая идентификация линейных стационарных динамических систем при прямоугольном входном сигнале / Ю.Е. Воскобойников, В. А. Боева, Е. Д. Антипина // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022682577. ФГБУН ИСЭМ СО РАН. – № 2022682044; заявл. 17.11.2022; опубл. 24.11.2022.