

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Иркутский государственный университет»

На правах рукописи



Антипина Екатерина Дмитриевна

**Математическое моделирование нелинейных динамических
систем с векторным входом в теплоэнергетике
(численные методы, алгоритмы)**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, доцент
Солодуша Светлана Витальевна

Иркутск-2025

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Анализ проблемы и постановка задач исследования	16
1.1. Задачи идентификации динамических систем в контексте математического моделирования	17
1.2. Полиномы Вольтерра в задачах идентификации и моделирования нелинейных динамических систем	19
1.3. Постановка задачи идентификации ядер Вольтерра	26
1.3.1. Выбор тестовых сигналов из класса кусочно-линейных функций	26
1.3.2. Выбор тестовых сигналов из класса кусочно-постоянных функций	30
1.4. Задача идентификации входных сигналов в полиномах Вольтерра	35
1.5. Динамические уравнения для моделирования теплофизических процессов	38
1.5.1. Динамика энталпии на выходе из элемента теплообменной установки	39
1.5.2. Динамика давления и температуры вещества на локальном участке пароводяного тракта крупной теплоэнергетической системы	41
1.6. Выводы к первой главе	46
Глава 2. Интегральные уравнения Вольтерра I рода в задаче идентификации нелинейной динамики	48
2.1. Идентификация ядер Вольтерра в уравнениях с двумя переменными пределами интегрирования	49
2.1.1. Методы средних прямоугольников и Product Integration в задаче идентификации нестационарного ядра. Анализ сходимости разностных схем	49
2.1.2. Метод Рунге-Кутта в задаче идентификации несимметричного ядра	61

2.1.3. Численное решение линейных многомерных уравнений Вольтерра методом шагов	63
2.2. Задача идентификации векторного входного сигнала в квадратичном и кубическом полиномах Вольтерра	75
2.2.1. Идентификация входного сигнала на исходных данных, отягощенных погрешностями	76
2.2.2. Восстановление входного сигнала для нелинейной системы интегральных уравнений	78
2.3. Верификация и анализ результатов численных экспериментов .	82
2.3.1. Численные эксперименты на основе сигналов из класса кусочно-линейных функций	82
2.3.2. Численные эксперименты на основе сигналов из класса кусочно-постоянных функций	85
2.3.3. Численные эксперименты в задаче идентификации векторного входного сигнала	89
2.4. Выводы ко второй главе	91

**Глава 3. Алгоритмы ПВК для динамических систем типа
«вход-выход»: обзор и апробация для задач
в теплоэнергетике** 93

3.1. Современные программно-вычислительные комплексы: обзор, анализ и перспективы	93
3.2. Развитие и модификация программно-вычислительного комплекса «Динамика»	96
3.2.1. Вычислительный алгоритм на основе метода средних прямоугольников для интегрального уравнения Вольтерра I рода с нестационарным ядром	97
3.2.2. Вычислительные алгоритмы для интегрального уравнения Вольтерра I рода со стационарным ядром	99
3.3. Моделирование динамики переходных процессов крупной энергетической системы	104
3.3.1. Сравнение подходов к идентификации ядер Вольтерра для квадратичной модели	105

3.3.2. Оптимизация амплитуд входных возмущений и оценка точности моделей	110
3.4. Выводы к третьей главе	115
Заключение	116
Перечень сокращений и обозначений	118
Список литературы	119
Приложение А. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ	139
Приложение Б. Документы о практическом использовании результатов диссертационного исследования	142

Введение

Актуальность исследования. В настоящее время актуальны математические модели, описывающие процессы в эмерджентных динамических системах. Для многих таких систем математическая модель, представимая в виде совокупности дифференциальных, интегро-дифференциальных или интегральных уравнений с алгебраическими связями, является важнейшим инструментом научных исследований. Многообразие динамических систем в энергетике, в том числе разнонаправленность задач моделирования, включающих апостериорную диагностику, прогнозирование, а также разработку систем контроля и управления, предопределяет неизменный интерес к развитию математического моделирования нелинейных динамических систем типа «вход-выход».

Актуальность темы исследования подчеркивается важностью прикладных задач, связанных с моделированием и идентификацией нелинейной динамики технических объектов энергетики. В частности, в условиях, когда основу энергетики Российской Федерации составляют тепловые электрические станции, а темпы обновления их фондов остаются низкими, особую значимость приобретает разработка и применение эффективных численных методов. Эти методы позволяют не только упростить сложные математические модели, разработанные ранее, но и обеспечить высокую точность и быстродействие при решении задач, связанных с управлением и оптимизацией режимов функционирования энергетических систем.

Интегральные модели, представленные в диссертационной работе, основаны на использовании интегро-степенных рядов Вольтерра [48], пристальное внимание к которым в научных публикациях обусловлено разносторонними исследованиями: от прикладных задач в сфере машинного обучения до теоретических – в области математического моделирования. В условиях нестационарности динамических процессов, когда $x(t)$, $y(t)$ – скалярный вход и выход соответственно, зависящие от времени t , нелинейный характер связи

выхода $y(t)$ и входа $x(t)$ определяется как

$$y(t) = P[x(t)] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \quad t \in [t_0, T]. \quad (\text{B.1})$$

Здесь оператор $P[x(t)]$ – причинный (или вольтерровый). Подынтегральную функцию K_n называют ядром Вольтерра. Полагаем, что свойства динамической системы неизменны за временной промежуток $[t_0, T]$. Тогда ядра Вольтерра (переходные характеристики динамической системы) зависят лишь от разности аргументов $t - s_k$, $k = \overline{1, n}$, следовательно, вместо (B.1) имеем

$$\hat{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \hat{K}_n(s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(t - s_k) ds_k, \quad t \in [t_0, T], \quad (\text{B.2})$$

где ядра \hat{K}_n симметричны по всем переменным.

Несмотря на большое прикладное значение данного математического аппарата и множество разработанных методов применения (B.1), (B.2) для моделирования нелинейной динамики во временной области, остается немало нерешенных задач. Это сопряжено с появлением новых технических возможностей и возросшими требованиями к точности численного решения динамической задачи и к быстродействию алгоритмов в «реальном масштабе времени», а также со сложностью решения обратных задач (идентификации ядер Вольтерра в (B.1), (B.2) и входного сигнала $x(t)$, обеспечивающего требуемый отклик динамической системы $y(t)$).

Актуальность исследуемой диссертационной работы определяется новыми классами многомерных интегральных уравнений Вольтерра I рода, используемых для построения динамических моделей, модификацией численных методов решения обратных задач восстановления переходных характеристик и входных сигналов, а также применением эффективных вычислительных алгоритмов в задаче моделирования динамики теплотехнического оборудования.

Степень изученности и разработанности проблемы.

Обратные задачи математической физики, возникающие при математическом моделировании динамики теплофизических объектов, относятся к некорректно поставленным задачам [115]. Основы этого направления были

заложены в классических работах А.Н. Тихонова [114; 117], М.М. Лаврентьева [71–74] и В.К. Иванова [62; 63], а также их учеников и последователей. Отметим наиболее близких к теме диссертационной работе авторов: А.Л. Агеев и В.В. Васин [43], А.С. Апарчин и А.Б. Бакушинский [19; 23; 26; 27; 86; 132], А.А. Асанов [134], М.В. Булатов [35–37], А.Л. Бухгейм и М.В. Клибанов [39–41; 137], Ю.Е. Воскобойников [50; 54], А.М. Денисов [60], В.С. Сизиков [97], W. Gear [145], P.K. Lamm [148].

Применение таких важных инструментов в задаче моделирования нелинейной динамики, как интегро-степенные ряды Вольтерра, рассматривалось В.А. Вениковым и О.А. Сухановым [45], А.М. Дейчем [59], В.Д. Павленко [82–84], Ю.С. Попковым [85], К.А. Пупковым [87; 88], В.А. Капалиным [66], Н.А. Магницким [75], S.A. Belbas [138], W. Greblicki [146], V.Z. Marmarelis [152], H.L. Van Trees [42; 166] и др.

Существенную роль при описании динамических (развивающихся [56]) систем играют линейные уравнения вольтерровского типа с двумя переменными пределами интегрирования. Данный класс «неклассических» интегральных уравнений связан с задачей идентификации ядер Вольтерра. Качественным анализом и поисками численного решения этих уравнений занимались А.С. Апарчин [16; 22; 24; 131], А.А. Асанов и М.И. Иманалиев [64], В.А. Бовева и Ю.Е. Воскобойников [31; 170], М.Н. Ботороева и М.В. Булатов [33], И.В. Бойков [32], И.В. Сидлер [25], Д.Н. Сидоров [93; 94], С.В. Солодуша [102], А.Н. Тында [118–120; 164], Р.Г. Флейк [122], Ю.П. Яценко [125] и др. Исследованиям полиномиальных уравнений Вольтерра I рода и их систем посвящены работы А.С. Апарцина [21; 133], Е.В. Марковой и М.В. Булатова [34], С.В. Солодуши и В.А. Спиряева [106; 108], Д.Н. Сидорова и Н.А. Сидорова [96], S.A. Belbas и Yu. Bulka [138] и др.

К настоящему времени теория указанных классов уравнений недостаточно развита. В диссертации рассматриваются новые виды уравнений Вольтерра I рода и их систем, возникающие в задачах непараметрической идентификации нелинейной динамики во временной области.

Цель работы. Данное исследование ориентировано на применение нового подхода к моделированию нелинейной динамики систем с векторным входом для исследования теплофизических процессов в условиях неполной

априорной информации. Ключевая идея состоит в построении математических моделей на основе допустимого семейства тестовых сигналов из класса кусочно-линейных функций. В основе верификации данного подхода лежит использование реальных параметров эксплуатационных режимов теплотехнических объектов.

Основные задачи исследования диссертационной работы:

1. Сравнительный анализ подходов к описанию и прогнозированию нелинейной динамики систем типа «вход-выход» с акцентом на обратные задачи непараметрической идентификации в условиях неполной априорной информации. Развитие методики построения математических моделей на основе новых классов уравнений Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования и привлечением квадратурных численных методов, обладающих свойством саморегуляризации.
2. Модификация методов приближенного решения линейных многомерных уравнений Вольтерра I рода с предысторией в задаче идентификации несимметричных ядер.
3. Исследование разрешимости разностных схем для систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающих в задаче идентификации ядер Вольтерра. Качественный анализ нелинейных систем интегральных уравнений вольтерровского типа, связанных с задачей восстановления векторного входного сигнала.
4. Создание программного обеспечения для модификации существующего подхода численного моделирования, анализ области применимости разработанных вычислительных алгоритмов.
5. Апробация созданных методик и программных средств с целью численного моделирования откликов объектов теплоэнергетики. В качестве выходных сигналов рассмотрены: изменение энталпии в элементе теплообменного аппарата, а также изменения температуры и давления в конденсаторе и подогревателе низкого давления пароводяного тракта энергоблока Назаровской ГРЭС мощностью 135 МВт.

Объектом исследования в диссертационной работе являются новые классы уравнений Вольтерра I рода в задаче непараметрической идентификации математических моделей и алгоритмы автоматического регулирования

динамики теплотехнических объектов на примере цифровой тени крупной электроэнергетической системы в условиях неполной априорной информации.

Предметом исследований являются численные методы, вычислительные алгоритмы, программное обеспечение для решения задач непараметрической идентификации и моделирования нелинейной динамики элементов теплоэнергетических установок, основанные на применении интегральных уравнений вольтерровского типа.

Методология и методы исследования. Численное моделирование динамики детерминированных устройств теплоэнергетики выполнено на основе теории интегральных и дифференциальных уравнений, функционального анализа, методов вычислительной математики. Изучение качественных свойств вычислительных алгоритмов проводилось в рамках теории условно-корректных задач, методов линейной алгебры, математического анализа и комбинаторики. Технология математического моделирования опиралась на основы методов компьютерного моделирования, системный анализ, статистические методы анализа данных.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложен подход к построению разностных аналогов интегральных моделей на основе новых классов интегральных уравнений Вольтерра I рода и устойчивых численных методов, направленных на создание инструментария для построения математических моделей.

2. Модифицированы методы приближенного решения линейных многомерных уравнений вольтерровского типа с предысторией для задач идентификации ядер.

3. Дополнен и развит инструментарий численных методов решения СЛАУ при идентификации квадратичных полиномов Вольтерра в случае кусочно-линейных входных сигналов. Исследована разрешимость нелинейных систем, возникающих в задаче восстановления векторного сигнала.

4. Создано программное обеспечение для модифицированных подходов к численному моделированию нелинейной динамики в условиях векторного входного сигнала, выявлены области применения предложенных вычислительных алгоритмов.

5. Выявлена эффективность разработанных численных методов и алгоритмов реализованных в виде модифицированного ПВК «Динамика» для моделирования нестационарной динамики изменения энталпии на выходе в элементе теплообменного аппарата, а также изменений температуры и давления в выделенном локальном участке теплотехнического оборудования энергоблока Назаровской ГРЭС.

Научная новизна полученных результатов работы основана на модификации и развитии методов и моделей описания нелинейной динамики с опорой на интегральные уравнения вольтерровского типа:

1. Усовершенствован метод моделирования нестационарной динамики, базирующийся на устойчивых алгоритмах идентификации нелинейных детерминированных систем с неполной априорной информацией. Ключевое отличие состоит в привлечении новых классов уравнений Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования при учете технических особенностей теплофизических устройств.

2. Модифицированы численные методы решения линейных многомерных уравнений вольтерровского типа в задаче идентификации стационарных несимметричных ядер с учетом запаздывания измерений в зарегистрированном сигнале. Выполнено обобщение приближенных методов решения одномерных интегральных уравнений Вольтерра I рода с предысторией на многомерный случай.

3. Впервые выделены и исследованы специальные типы СЛАУ в задаче численной идентификации квадратичного полинома Вольтерра в случае кусочно-линейных тестовых сигналов. Доказаны новые теоремы о разрешимости задачи восстановления векторного входного сигнала для нелинейных систем интегральных уравнений Вольтерра I рода, формирование которых выполнено с учетом размерности отклика динамического объекта.

4. Реализованы предложенные вычислительные алгоритмы для модификации программно-вычислительного комплекса (ПВК) «Динамика» в виде модулей непараметрической идентификации ядер Вольтерра. Выделены новые области применимости предлагаемых алгоритмов в задаче моделирования динамики элемента теплообменной установки.

5. Предложенные методики и программное обеспечение были апробиро-

ваны на тестовых примерах в рамках численного моделирования нелинейной динамики теплотехнического оборудования крупной электроэнергетической системы в случае векторного входного сигнала.

Теоретическая значимость. В диссертационной работе теоретически развита технология идентификации математической модели типа «вход-выход» для нелинейных динамических систем, допускающих тестовые входные сигналы из класса кусочно-линейных функций (доказательство невырожденности СЛАУ, исследование качественных свойств численных решений новых классов уравнений Вольтерра I рода). Выделен новый класс нелинейных интегральных моделей на базе полиномиальных уравнений Вольтерра I рода, связанных с задачей идентификации входных сигналов, обеспечивающих при заданных переходных характеристиках требуемый выходной сигнал. Предложенные подходы предоставляют единый универсальный аппарат непараметрической идентификации нестационарных динамических объектов с векторным входом.

Практическая значимость.

1. Полученные в работе результаты вносят значимый вклад в теорию и методы математического моделирования нелинейной динамики систем типа «вход-выход» на основе нестационарных полиномов Вольтерра в случае векторных входных сигналов. Созданные универсальные методы построения интегральных моделей учитывают технические особенности объектов теплоэнергетики и базируются на физически реализуемых тестовых входных сигналах из класса кусочно-линейных функций.

2. Разработанные численные схемы решения новых классов интегральных уравнений Вольтерра I рода на основе кусочно-линейных сигналов с помощью метода Product Integration имеют превосходство по скорости сходимости в сравнении с классическими методами второго порядка точности.

3. Предложенная интегральная модель в задаче идентификации входных сигналов, основанная на комбинации полиномов различного порядка, позволяет использовать отклики динамической системы, имеющие единую физическую природу.

4. Реализованные алгоритмы и программное обеспечение могут служить основой для создания автоматизированных компьютерных систем для моде-

лирования нелинейной динамики теплообменного аппарата и оборудования локального участка пароводяного тракта энергоблока Назаровской ГРЭС. Созданное программное обеспечение встроено в модифицированную версию ПВК «Динамика» для численного моделирования нелинейной динамики широкого класса технических систем.

Обоснованность и достоверность результатов диссертации. Корректность полученных результатов подтверждается использованием элементов теории математического моделирования и системного анализа, а также соответствующими математическими выкладками и выводами, сформулированными в виде теорем. Достоверность разработанного математического инструментария подтверждается адекватностью используемых в работе динамических закономерностей предметной области, верификацией при решении модельных задач и при расчетах с экспериментальными данными, полученными различными исследовательскими группами, в том числе в ИСЭМ СО РАН.

Соответствие паспорту специальности. Выносимые на защиту положения соответствуют следующим пунктам паспорта научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

Пункт 1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (физико-математические науки) (положения № 1, 2 диссертационной работы).

Пункт 2. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (положение № 3 диссертационной работы).

Пункт 3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (положения № 4, 5 диссертационной работы).

В диссертации присутствуют оригинальные результаты из трех областей:

1. Математическое моделирование. Созданы математические модели элементов пароводяного тракта Назаровской ГРЭС в случае векторного входного сигнала, состоящего из расходов воды и пара на входе в конденсатор и подогреватель низкого давления. Разработан новый математический метод

построения моделей нестационарных динамических процессов в виде квадратичных полиномов Вольтерра на основе векторных входных сигналов из класса кусочно-линейных функций. В задаче восстановления входных сигналов предложен набор тестовых моделей на основе систем полиномиальных уравнений Вольтерра с использованием априорной информации о скалярности выходного сигнала.

2. Численные методы. Предложен подход для поиска численного решения многомерных интегральных уравнений, который развивает классический метод шагов, разработанный для одномерного случая. Для новых классов уравнений осуществляется поиск численного решения с использованием квадратурных методов второго порядка (метод средних прямоугольников) и метода типа Рунге-Кутта, имеющего третий порядок.

3. Комплексы программ. Предложен и реализован быстродействующий программный комплекс, включающий универсальный алгоритм идентификации несимметричных ядер Вольтерра. Метод построения интегральных моделей учитывает зашумленность входных сигналов. Верификация результатов имитационного моделирования теплообменных процессов основана на числовых значениях параметров теплообменных процессов цифровой тени энергоблока Назаровской ГРЭС. Проведены вычислительные эксперименты на основе имитационной модели элемента теплообменной установки.

Апробация результатов работы. Полученные в ходе выполнения диссертационной работы результаты обсуждались на научных конференциях и семинарах:

- всероссийские конференции: «Системные исследования в энергетике – 2019» (г. Иркутск, 2019); «Энергетика XXI века: устойчивое развитие и интеллектуальное управление» (г. Иркутск, 2020); «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (г. Пенза, 2024); «Неустойчивые задачи вычислительной математики» (г. Иркутск, 2022, 2024);
- международные конференции: «Математика, её приложения и математическое образование» (г. Улан-Удэ, 2020, 2023); «Актуальные вопросы архитектуры и строительства», посвященная 90-летию НГАСУ (г. Ново-

сибирск, 2020); «Марчуковские научные чтения 2020» (МНЧ-2020), посвященная 95-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука (г. Новосибирск, 2020); «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (г. Иркутск, 2021, 2022); «Computer Science and Information Technologies» (Yerevan, Armenia, 2021); «Теория оптимального управления и приложения» (г. Екатеринбург, 2022); «XXXIII Крымская осенняя математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (г. Симферополь, 2022);

- научные семинары: семинар отдела «Некорректные задачи анализа и приложений» ФГБУН Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН) (г. Екатеринбург, 2024), семинар отдела «Прикладная математика» ФГБУН Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИСЭМ СО РАН) (г. Иркутск, 2024), семинар Института математики, физики и компьютерных наук (ИМФКН) ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова» (г. Улан-Удэ, 2025).

Результаты диссертационной работы и материалы исследований получены при поддержке грантов РНФ № 22-21-00409, № 22-11-00173. Практические результаты использованы при реализации проектов по государственному заданию (проекты: № AAAA-A17-117030310442-8, № AAAA-A21-121012090034-3), что подтверждено соответствующим актом об использовании результатов диссертации.

Публикации по теме диссертационного исследования. Основное содержание диссертации опубликовано в 14 научных статьях, из них 3 статьи – в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК по специальности 1.2.2. или изданиях, индексируемых в базе Web of Science, категории K1; 7 – в трудах конференций, индексируемых в базах WoS/Scopus; 4 – в иных изданиях. На компьютерные программы, используемые в вычислительных экспериментах в рамках диссертационного исследования, получено 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех

глав, заключения, списка использованных источников и двух приложений. Основной текст диссертационной работы содержит 142 страницы, 18 рисунков и 13 таблиц. Список литературы содержит 173 источника. В приложениях приведены свидетельства о регистрации программ (приложение А), акт о внедрении результатов диссертационного исследования (приложение Б).

Личный вклад. Текст диссертации не содержит заимствований без ссылок на первоисточники, а также результатов, полученных в соавторстве без упоминания авторов. В работах, опубликованных в соавторстве, соискателю принадлежит разработка вычисленных методов, реализация численных алгоритмов в виде программ для ЭВМ и верификация разработанного программного обеспечения, а также выполнение вычислительных экспериментов в приложениях. Вклад автора в подготовку статей в соавторстве оценивается как весомый. Теоретические результаты, связанные с полиномиальными интегральными уравнениями, получены совместно с С.В. Солодушей. В исследованиях, выполненных совместно с Ю.Е. Воскобойниковым и В.А. Боевой, автор проводил вычислительные работы по применению сглаживающих кубических сплайнов. В совместных работах с Э.А. Таировым, В.А. Спириевым, Е.В. Марковой автор провел реализацию вычислительного эксперимента и верификацию результатов моделирования динамики участка пароводяного тракта энергоблока Назаровской ГРЭС. Формулировки и доказательства теорем, приведенные в диссертации, принадлежат соискателю. Конфликт интересов с соавторами отсутствует. Реализация ПВК «Численное решение одномерного интегрального уравнения в задаче идентификации ядер Вольтерра на базе кусочно-линейных тестовых сигналов», «Численное решение двумерного интегрального уравнения Вольтерра I рода относительно несимметричного ядра методом Рунге-Кутта» выполнена автором лично.

Глава 1. Анализ проблемы и постановка задач исследования

Математическое моделирование динамических систем на современном этапе развития научно-технического прогресса играет ключевую роль в понимании и прогнозировании сложных явлений. Передовые технологии, включающие принципиально новые подходы и учитывающие взаимосвязанность различных процессов, ставят перед исследователями задачи, требующие интеграции знаний из разных областей, таких как физика, математика, инженерия и информатика. Для адекватного описания динамических систем необходимо использовать как дифференциальные, так и интегральные уравнения, поскольку они способны охватывать широкий спектр явлений и учитывать их динамику во времени.

Интегральные уравнения становятся особенно актуальными для анализа динамики сложных технических систем, так как они позволяют эффективно моделировать нелинейные взаимодействия в условиях неполной информации (априорной неопределенности) о переменных и состоянии физического процесса в сравнении с традиционными дифференциальными уравнениями [46]. Использование интегральных уравнений также способствует уменьшению размерности задач (например, при решении краевых задач для уравнений Лапласа [121] и Гельмгольца [58] в трехмерных областях, в задачах Дирихле [98] и Неймана [76]), что упрощает их решение. Таким образом, данный математический аппарат может служить мощным инструментом для описания широкого класса физических явлений, в частности, распространение тепла в средах с переменными свойствами, описание динамики электрических сигналов в сложных цепях, моделирование волновых процессов в неоднородных средах, анализ деформаций в анизотропных материалах, исследование турбулентных течений жидкости и газа и т.д.

Несмотря на свои преимущества, при применении интегральных уравнений Вольтерра I рода как инструмента математического моделирования возникает ряд трудностей. Как хорошо известно, данный класс интегральных уравнений является частным случаем уравнения Фредгольма I рода [46]. Как и для уравнений Фредгольма I рода, для уравнений Вольтерра I рода условие корректности (по Адамару) может нарушаться (см, например, [68]). Соглас-

но классическому определению [114], задача корректна на паре метрических пространств (X, Y) , если: решение существует $\forall y \in Y$, оно единственno и является устойчивым (малые погрешности в Y вызывают малые отклонения в X).

Отметим, что если нарушается условие устойчивости при существовании единственного решения (сколь угодно малые погрешности в правой части или ядре (в метрике Y) приводят к большим отклонениям решения (в метрике X)), то такие задачи называются условно корректными или слабо неустойчивыми [131]. Как правило, уравнения Вольтерра I рода относят к классу условно корректных задач, решение которых допускает применение методов регуляризации М.М. Лаврентьева и А.С. Апарцина [46]. Отметим, что характер неустойчивости в таких задачах идентичен неустойчивости в задаче дифференцирования. Для решения таких задач применяют особые методы регуляризации [17].

Сложности в решении интегральных уравнений Вольтерра I рода заключаются в выборе численных методов для их решения и учете возможных вычислительных ошибок. В вычислительной практике применяют различные подходы, например, основанные на явных и неявных методах [35].

Значительное внимание должно быть уделено также вопросу сходимости и устойчивости численных решений, особенно в условиях осциллирующих ядер Вольтерра. Разработка эффективных алгоритмов для решения интегральных уравнений вольтерровского типа становится критически важной, поскольку различные области применения могут требовать уникальных подходов и адаптации существующих методов.

1.1. Задачи идентификации динамических систем в контексте математического моделирования

Математическое моделирование представляет собой метод исследования реальных процессов и явлений путем их описания с помощью математических структур – уравнений, алгоритмов, графов и других абстрактных объектов [69]. Как отмечают в своей работе А.Н. Тихонов и А.А. Самарский, математическая модель является упрощенным представлением реального объекта, сохраняющим его ключевые свойства и позволяющим проводить анализ

и прогнозирование поведения системы [116].

В контексте математического моделирования особое значение приобретают обратные задачи, которые заключаются в определении неизвестных параметров, коэффициентов или даже структуры системы по наблюдаемым данным о ее поведении [1]. В отличие от прямых задач, где решение определяется при заданных начальных условиях и параметрах модели, обратные задачи часто оказываются некорректно поставленными [44].

Частным случаем обратных задач является задача идентификации динамической системы. Под этим термином в общем случае понимают определение переходных характеристик системы по экспериментальным данным [89; 151]. В отличие от классических обратных задач математической физики, где часто решается вопрос определения входных воздействий или начальных условий, задачи идентификации фокусируются на построении самой модели системы, что делает ее ключевым инструментом математического моделирования. Термин «идентификация» используется в отечественной научной литературе более полувека в связи с задачами, для которых требуется построить математическую модель по «информации о реакциях объекта на известные внешние возмущения» [66].

В зависимости от способа представления модели, выделяют следующие виды идентификации:

- *Структурная идентификация* – выбор самой структуры модели, например, количество локальных моделей [38].
- *Параметрическая идентификация* – определение коэффициентов модели, структура которой считается известной, например, оценка параметров дифференциальных уравнений [61].
- *Непараметрическая идентификация* – восстановление функциональных характеристик модели [66; 79].

Сложности идентификационного процесса требуют разработки специальных математических методов, способных работать с неполными данными и учитывать специфику обратных задач [150]. Особую роль здесь играет выбор класса моделей, адекватно описывающих поведение системы. В случае

сложных динамических систем традиционные подходы, основанные на обыкновенных дифференциальных уравнениях, часто оказываются недостаточными [136].

Для линейных стационарных систем задача непараметрической идентификации, как правило, сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода с ядром типа свертки

$$y(t) = \int_0^t K(t-s)x(s)ds, t \in [0, T]. \quad (1.1)$$

В статье [66] описаны подходы к решению (1.1), которые основаны на замене некорректной задачи на «на близкую к ней, но корректную задачу»:

- с применением квадратурных методов, обладающих свойством саморегуляризации (h -регуляризация Апарцина–Бакушинского);
- с использованием регуляризации по методу М.М. Лаврентьева;
- с применением метода наименьших квадратов.

Перечисленные подходы считаются классическими методами непараметрической идентификации. Некоторые авторы сочетают классические подходы теории обратных задач с методами машинного обучения [139]. Такая интеграция позволяет использовать априорную физическую информацию о системе, работать с неполными и зашумленными данными, а также автоматизировать процесс выбора структуры модели [154].

1.2. Полиномы Вольтерра в задачах идентификации и моделирования нелинейных динамических систем

В диссертационной работе основное внимание будет акцентироваться на аппарате интегро-степенных рядов Вольтерра (B.1), (B.2), которые впервые были введены итальянским математиком Вито Вольтерра в 1887 году и описаны в работе [48]. В этой работе также показано, что если $P[x(t)]$ имеет производную по Фреше любого порядка, то (B.1), (B.2) есть обобщение формулы Тейлора для функции n независимых переменных.

Ряд (B.1), (B.2) является мощным инструментом для описания динамических систем, позволяющим моделировать широкий спектр явлений в различных областях науки и техники, технологические процессы и динамику нелинейных систем, представляемых в виде математических моделей типа «вход-выход». Конечный отрезок интегро-степенного ряда Вольтерра (полином Вольтерра) можно представить в следующем виде [48]:

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq p} f_{i_1, \dots, i_n}(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

где $y(t)$ – скалярный отклик динамической системы, t – время. Функция $f_{i_1, \dots, i_n}(t)$ учитывает взаимодействие между компонентами входного сигнала $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t))^T$:

$$f_{i_1, \dots, i_n}(t) = \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1, \dots, i_n}(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x_k(s_k) ds_k, \quad (1.3)$$

где K_{i_1, \dots, i_n} – симметричные по s_1, \dots, s_n ядра Вольтерра при совпадающих индексах i_1, \dots, i_n . Ядра Вольтерра в (1.3) отражают нестационарный характер динамики технических (энергетических) объектов. В (1.3) $t \in [0, T]$, при этом отрезок $[0, T]$ трактуется как временной интервал, характеризующий память системы.

Универсальность данного математического аппарата позволяет исследователям использовать (1.2), (1.3) в качестве инструмента для моделирования различных физических и технологических процессов. Это особенно ценно в таких областях, как теплофизика и электрофизика [28; 45; 65; 142; 143], где интегро-степенные ряды Вольтерра используются для моделирования нелинейной динамики электрических систем и процессов теплопередачи.

В аудиосистемах часто требуется анализ нелинейных характеристик. Например, в статье [153] рассматривается применение рядов Вольтерра для построения модели с целью исследования изменений нелинейных искажений звука в аудиосистемах. Как результат, автор статьи [153] получает упрощенную модель, которая на порядок уменьшает расчеты, при этом показано, что модель хорошо работает для слабых искажений, но менее точна для сильных нелинейностей, что подтверждается экспериментами. Аналогично, в ста-

тье [165] применение рядов Вольтерра позволяет построить модель, описывающую процесс нелинейного искажения спектра звукового сигнала. При этом используется упрощенный подход, основанный на применении только значений функции $K(t, s_1, \dots, s_n)$ для некоторых $s_1 = s_2 = \dots = s_n$, что позволяет уменьшить вычислительную сложность. Однако такое упрощение может привести к потере точности при описании сложных нелинейных эффектов. Как отмечают авторы [165], такой подход дает удовлетворительные результаты для систем со слабыми нелинейностями. Далее, в работе [147] исследуется моделирование нелинейных аудиоэффектов с применением рядов Вольтерра. Ядра определяются методом кросс-корреляционного анализа с использованием белого шума, что позволяет выделять нелинейные компоненты, но требует точного подбора дисперсии входного сигнала для достоверных результатов. Автор статьи [147] сравнивает модели разного порядка N в (1.2) на примере простой системы. Подобным образом автор [147] с помощью рядов Вольтерра и анализа ошибок проводит анализ степени нелинейности системы.

Авторы работы [144] применяют интегральные уравнения Вольтерра и Винера для построения модели динамики нелинейных искажений в графических устройствах и анализа рецептивных полей нейронов в нейробиологии. Используя полиномиальные ядра в гильбертовом пространстве, они разработали метод, позволяющий эффективно оценивать сложные нелинейные системы без экспоненциального роста вычислительной сложности. В результате авторам [144] удалось точно восстановить параметры систем, включая скрытые нелинейные взаимодействия, даже при наличии шума и высокой размерности данных.

В области фильтрации сигналов также применяются методы, основанные на рядах Вольтерра. Например, в статье [95] разработан адаптивный фильтр, основанный на квадратичном отрезке (1.2), (1.3), для обработки нелинейных сигналов с помехами (шумами). Алгоритм сочетает линейную и квадратичную фильтрацию, минимизируя ошибку даже при неточных исходных данных. Автором работы [95] показано, что фильтр устойчив к шумам и изменениям параметров, что подтверждено моделированием для гауссовых сигналов.

В статье [126] предложена простая модель транзистора для детектиро-

вания высокочастотных сигналов, в основе которой лежат ряды Вольтерра. В данной работе ядра Вольтерра интерпретируются как физические характеристики. При этом эффективность данной модели была подтверждена на примерах. Также авторы [126] показали, что их модель не только описывает работу детекторов, но и может быть использована для целей анализа функционирования оборудования.

В статьях [123; 124] рассматривается модель глазодвигательной системы, основанная на аппарате интегро-степенных рядов Вольтерра. В работе [124] рассматривается скалярный случай входного сигнала, а работа [123] расширяет [124] на векторный случай. Обе работы посвящены идентификации модели с привлечением метода, построенного на базе полиимпульсных сигналов (с помощью функции Дирака) и описанного в работе [77]. Однако из-за того, что динамика исходной модели, как правило, бывает гораздо сложнее, авторы [123; 124] в исследованиях ограничиваются анализом отдельных участков матриц переходных характеристик (ядер Вольтерра). В указанных статьях авторы показали, что даже на отдельных фрагментах переходных характеристик можно выявить ключевые нелинейные эффекты, характерные для глазодвигательной системы.

В статье [135] интегро-степенные ряды Вольтерра применяются для моделирования нелинейной аэродинамической системы с векторным входом (угол атаки и вертикальная скорость) и скалярным выходом (аэродинамический момент). Авторы отмечают, что введенные ими несимметричные ядра позволяют учесть взаимное влияние компонент векторного входа. Сравнение с расчетными данными показало, что предложенная модель адекватно описывает нелинейное поведение системы.

Статья [67] посвящена разработке адаптивного фильтра на основе усеченных полиномов Вольтерра с параллельными каскадами для улучшения качества передачи цифрового видео. Автор [67] предлагает реализовать построение полиномов высших порядков через параллельные структуры из каскадов низших порядков, что повышает эффективность обработки видеосигналов в условиях искажений, что подтверждается на примерах.

В работе [84] исследуется нелинейная динамика фотосинтетических реакционных центров с помощью моделирования отклика на свет в виде по-

линомов Вольтерра. Моделирование позволило авторам [84] выявить наличие продолжительной «памяти» (нелинейные изменения в структуре системы, вызванные внешним воздействием и сохраняющиеся в течение заданного времени, что влияет на ее дальнейший отклик) у биологического объекта, что говорит о возможности более широкого применения аппарата интегро-степенных рядов Вольтерра.

Прогнозирование нестационарных временных рядов [140] – еще одно важное применение интегро-степенных рядов Вольтерра; они используются для анализа экономических данных, климатических изменений и других временных процессов, что позволяет строить более точные прогнозы и выявлять скрытые закономерности.

В области идентификации нелинейных механических систем с учетом больших смещений ряды Вольтерра играют ключевую роль в моделировании динамики системы магнитно-упругой балки, подверженной магнитному взаимодействию. Эти системы демонстрируют сложные нелинейные характеристики. В статье [167] рассматривается стохастическая методология идентификации, которая учитывает неопределенности и вариативность данных. Это обеспечивает более точное моделирование нелинейных динамических свойств и улучшает надежность идентификации систем.

Анализ существующих работ показывает, что большинство исследований ограничивается стационарными процессами со скалярным входом. Хотя в работе [135] рассматривается векторный случай, нестационарность динамики системы не учитывается – предполагается, что ее свойства неизменны по времени. Авторы [135] не учитывают также возможную несимметричность переходных процессов, что ограничивает применимость метода для более сложных случаев. Таким образом, в реальных задачах ключевое значение имеют нестационарность (изменение переходных характеристик системы по времени) и векторность входных воздействий.

В диссертационной работе рассматриваются полиномы Вольтерра, где ядра явно зависят от времени, а также учитывается векторность входа, что позволяет учесть влияние одновременного изменения входных сигналов на выход динамической системы.

Отметим, что (1.2), (1.3) можно рассматривать с разных точек зрения

относительно искомого результата. Это приводит к выделению нескольких ключевых задач, каждая из которых требует различных подходов. Рассмотрим каждую из них подробнее.

1) Построение модели вида (1.3) означает решить обратную задачу – идентификацию ядер Вольтерра K_{i_1, \dots, i_n} при известных $x(t)$ и $y(t)$ (Рисунок 1.1).

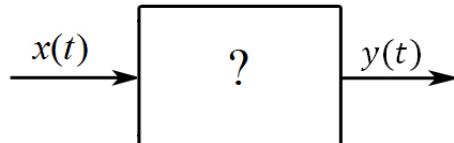


Рисунок 1.1 – Блок-схема для задачи 1

Эта проблема является одной из самых сложных, так как требует решения задачи структурной идентификации (в частности, определения N в верхнем пределе суммы (1.2)) и непараметрической идентификации – восстановления функций многих переменных K_{i_1, \dots, i_n} . Успешная идентификация ядер Вольтерра играет важную роль для адекватного описания и моделирования системы, позволяя не только оптимизировать ее поведение, но и улучшить точность предсказаний. На практике при моделировании динамических объектов опираются на значения технических параметров, например, высоту (амплитуду) входных сигналов, длительность проведения эксперимента. Поэтому при дальнейшем тестировании моделей важно согласование данных, используемых при идентификации, и данных произвольного сигнала на этапе верификации.

Как правило, для этого используются дополнительные подходы, такие как оптимизация амплитуд тестовых сигналов [133], которые ищут подходящие значения амплитуд тестовых сигналов, используемых при идентификации ядер, чтобы свести к минимуму разницу между реальным откликом системы и вычисленным на основе построенных интегральных моделей. Кроме того, стоит отметить, что применение статистических подходов, таких как байесовская статистика, также может улучшить процесс идентификации, позволяя учитывать неопределенности и вариации в данных.

2) После построения модели вида (1.2), (1.3) можно сформулировать задачу относительно восстановления входного сигнала $x(t)$, обеспечивающего нужный (желаемый) нам отклик $y(t)$ при заданных ядрах K_{i_1, \dots, i_n} (Рисунок 1.2).

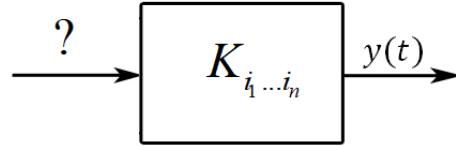


Рисунок 1.2 – Блок-схема для задачи 2

Эта задача относится к типу обратных задач, так как связана с обращением причинно-следственных связей.

Основой для формирования набора идентификационных моделей, которые аппроксимируют нелинейную динамику объекта (1.2), служат отклики $y_{\text{им}}(t)$ (индекс «им» означает «имитационный») на тестовые сигналы $x(t)$. При этом реакция моделей $y(t)$ совпадает с откликом имитационных моделей $y_{\text{им}}(t)$. Предполагаем, что причинный (вольтерровый) оператор P в уравнении

$$y(t) = P[x(t)] \quad (1.4)$$

действует из $C_{[0,T]}$ в $\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}$, где $\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)} \triangleq \{y : y \in C_{[0,T]}^{(1)}, y(0) = 0\}$. Таким образом, задача (1.4) корректно сформулирована по Адамару на паре метрических пространств $(C, \overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)})$. Это, в свою очередь, обеспечивает существование, единственность и устойчивость решения (1.4) в пространстве непрерывных функций $C_{[0,T]}$. При этом важно отметить, что задача, корректная на данной паре пространств, может оказаться некорректной на другой паре [46].

3) Следующий тип задачи (после построения (1.2), (1.3)) состоит в поиске выходного сигнала $y(t)$ при известных K_{i_1, \dots, i_n} и произвольных $x(t)$, т. е. непосредственное применение модели (1.2), (1.3) (Рисунок 1.3). Такая задача называется прямой. Она часто является первой ступенью при верификации процедуры восстановления ядер, поскольку позволяет оценить последствия известных воздействий.

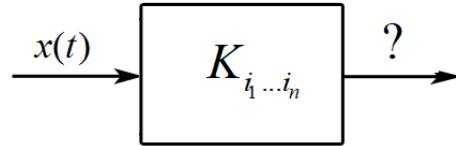


Рисунок 1.3 – Блок-схема для задачи 3

Для решения данной прямой задачи можно использовать численные методы интегрирования, такие как метод трапеций или метод Симпсона, которые могут эффективно приближать решения, особенно в сложных системах. Тем не менее, важно отметить, что прямые задачи могут быть подвержены воздействию шумов и других искажений, что требует дополнительной обработки данных для повышения точности результатов.

1.3. Постановка задачи идентификации ядер Вольтерра

В данном пункте рассматривается задача идентификации переходных характеристик с применением тестовых сигналов кусочно-линейного типа и тестовых сигналов из класса кусочно-постоянных функций.

1.3.1. Выбор тестовых сигналов из класса кусочно-линейных функций

Рассмотрим более подробно уравнение вида (1.2), (1.3), когда параметры N и p принимают значение 1. В результате имеем дело с классическим интегральным уравнением Вольтерра первого рода, записанным в следующем виде:

$$\int_0^t K(t, s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.5)$$

Здесь функция $K(t, s)$ принадлежит классу непрерывных функций C_Δ , где Δ – область, заданная условием $0 \leq s \leq t \leq T$.

Уравнение (1.5) часто возникает в задачах управления [55], например, при анализе систем с запаздыванием или в задачах идентификации управляющих воздействий по наблюдаемому отклику системы. Другими словами, в этих задачах осуществляется поиск входного воздействия при известном

отклике и переходных характеристиках.

Данный пункт посвящен задаче идентификации ядер Вольтерра при известных наборах $x(t)$, $y(t)$. Таким образом, под построением модели, соответствующей уравнению (1.5), будем понимать проведение идентификации функции ядра $K(t, s)$.

Рассмотрим способ идентификации интегральной модели вида (1.5), основанный на использовании тестовых входов $x_\nu(t)$:

$$x(t) \equiv x_\nu(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t}{\nu}, & 0 < t \leq \nu, \\ 1, & \nu \leq t, \end{cases} \quad (1.6)$$

где $x_\nu(t)$ – однопараметрическое семейство кусочно-линейных функций. Входам $x_\nu(t)$ соответствует реакция объекта вида

$$f(t) \equiv f_\nu(t) = \begin{cases} 0, & t = \nu = 0, \\ g(t, \nu), & 0 < \nu \leq t, \end{cases}$$

где отклик $f_\nu(t) \in C_\Delta^{(2)}$, $\Delta = \{t, \nu : 0 \leq \nu \leq t \leq T\}$. Подстановка (1.6) в (1.5) приводит к следующему интегральному уравнению Вольтерра I рода [158]:

$$\int_0^\nu K(t, s) \frac{s}{\nu} ds + \int_\nu^t K(t, s) ds = g(t, \nu), \quad (1.7)$$

решение которого находится по формулам [172; 173]:

$$K(t, \nu) = - (2g'_\nu(t, \nu) + \nu g''_{\nu^2}(t, \nu)), \quad t, \nu \in \Delta. \quad (1.8)$$

В статье [49] получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие разрешимость (1.7) в классе непрерывных функций:

$$g(0, 0) = 0, \quad g(t, \nu) \in C_\Delta^{(2)}.$$

Теперь рассмотрим (1.2) и (1.3) в контексте стационарной системы. Будем полагать, что ядро системы является функцией двух переменных, которая явно не зависит от времени.

В предположении, что $N = 2$ и $p = 2$, т. е. $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, уравнения (1.2) и (1.3) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{i=1}^2 \int_0^t K_i(s_1) x_i(t-s_1) ds_1 + \\
&+ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^i \int_0^t \int_0^t K_{ji}(s_1, s_2) x_i(t-s_1) x_j(t-s_2) ds_1 ds_2, \quad t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Ранее в работе [131] был предложен подход идентификации ядер K_1 , K_2 , K_{11} , K_{22} , который основан на применении тестовых сигналов в виде комбинаций функций Хевисайда. Но прежде чем перейти к описанию метода, необходимо для (1.9) решить задачу декомпозиции, т. е. нужно найти отклики $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_{11}(t)$, $f_{22}(t)$, $f_{12}(t)$, отвечающие за вклад в $y(t)$ соответствующего интегрального слагаемого, такие что

$$y(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_{11}(t) + f_{22}(t) + f_{12}(t).$$

Задача декомпозиции решается с помощью входных сигналов разных амплитуд. Предположим, что данная задача решена (она рассмотрена в [20]). Идентификация ядер K_1 , K_2 , K_{11} , K_{22} описана в работе [131]. Задача поиска ядра K_{12} оказывается более сложной. Ядро K_{12} отвечает взаимодействию между двумя различными физическими входами x_1 и x_2 , из чего следует неперестановочность аргументов s_1 и s_2 , т.е. $K_{12}(s_1, s_2) \neq K_{12}(s_2, s_1)$ (K_{12} является несимметричной функцией).

Для идентификации K_{12} рассмотрим уравнение

$$\int_0^t \int_0^t K_{12}(s_1, s_2) x_1(t-s_1) x_2(t-s_2) ds_1 ds_2 = f_{12}(t), \quad t \in [0, T]. \tag{1.10}$$

Обратим внимание, что функция $K_{12}(s_1, s_2)$ есть функция двух переменных, в то время как правая часть уравнения содержит функцию одной переменной, поэтому для поиска $K_{12}(s_1, s_2)$ используем однопараметрическое семейство сигналов, включающее дополнительный параметр ν ($\nu \leq t$), имеющий тот же смысл, что и основная переменная t .

Для входных возмущений возьмем следующие серии сигналов [101; 158]:

$$\begin{cases} x_{1_\nu}(t) = \begin{cases} 0, & \nu = 0, \\ \frac{t}{\nu}, & 0 < t \leq \nu, \\ 0, & \nu < t \leq T, \end{cases} \\ x_{2_\nu}(t) = e(t - \nu), \quad 0 \leq \nu \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} x_{1_\nu}(t) = e(t - \nu), \quad 0 \leq \nu \leq t \leq T, \\ x_{2_\nu}(t) = \begin{cases} 0, & \nu = 0, \\ \frac{t}{\nu}, & 0 < t \leq \nu, \\ 0, & \nu < t \leq T, \end{cases} \end{cases} \quad (1.12)$$

где $e(t)$ – функция Хевисайда:

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

В отличие от сигналов, приведенных в [131], указанные сигналы $x_{1_\nu}(t)$, $x_{2_\nu}(t)$ обладают фронтом нарастания (т. е. временем ν , затраченным на достижение требуемой высоты (амплитуды) сигнала, равной в данном случае 1) такой вид входного сигнала соответствует физическим требованиям его реализации.

Подставляя (1.11), (1.12) в (1.10), получим

$$\int_{t-\nu}^t ds_1 \int_0^{t-\nu} \frac{t-s_1}{\nu} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 = f_{12}^{(1)}(t, \nu), \quad (1.14)$$

$$\int_{t-\nu}^t ds_2 \int_0^{t-\nu} \frac{t-s_2}{\nu} K_{12}(s_1, s_2) ds_1 = f_{12}^{(2)}(t, \nu), \quad t \in [0, T]. \quad (1.15)$$

Согласно [131], совокупность уравнений (1.14) и (1.15) называется парным интегральным уравнением Вольтерра I рода, поэтому в дальнейшем будем использовать эту терминологию. В работе [161] было получено приближенное решение для парного интегрального уравнения (1.14), (1.15) в виде:

$$K_{12}(t, t - \nu) = \mathcal{D}_2 f_{12}^{(1)}(t, \nu) + \nu \mathcal{D}_3 f_{12}^{(1)}(t, \nu), \quad (1.16)$$

$$K_{12}(t - \nu, t) = \mathcal{D}_2 \overset{(2)}{f}_{12}(t, \nu) + \nu \mathcal{D}_3 \overset{(2)}{f}_{12}(t, \nu), \quad (1.17)$$

где

$$\mathcal{D}_2 \overset{(i)}{f}_{12}(t, \nu) = - \left(3 \frac{\partial^2 \overset{(i)}{f}_{12}}{\partial t \partial \nu} + 2 \frac{\partial^2 \overset{(i)}{f}_{12}}{\partial \nu^2} \right), \quad \mathcal{D}_3 \overset{(i)}{f}_{12}(t, \nu) = - \left(\frac{\partial^3 \overset{(i)}{f}_{12}}{\partial t \partial \nu^2} + \frac{\partial^3 \overset{(i)}{f}_{12}}{\partial \nu^3} \right),$$

при условии, что $\overset{(i)}{f}(t, \nu) \in C_{\Delta}^{(4)}$, $\Delta = \{t, \nu : 0 \leq \nu \leq t \leq T\}$, $i = 1, 2$.

1.3.2. Выбор тестовых сигналов из класса кусочно-постоянных функций

Рассмотрим подход к идентификации ядер Вольтерра, предложенный в работе [17], который использует тестовые сигналы, которые, в свою очередь, могут быть интерпретированы как специальные импульсные воздействия на систему. Эти тестовые сигналы задаются с помощью комбинаций функций Хевисайда с отклоняющимся аргументом и могут быть представлены следующим образом:

$$x_{\nu}(t) = e(t) - e(t - \nu), \quad 0 \leq \nu \leq t \leq T, \quad (1.18)$$

где функция Хевисайда $e(t)$ вида (1.13). Подстановка сигнала (1.18) в (1.5) дает

$$\int_0^{\nu} K(t, s) ds = f(t, \nu), \quad (1.19)$$

где $f(t, \nu)$ – отклик системы на указанные тестовые сигналы, заданные через (1.18). Легко заметить, что решение (1.5) в этом случае, при условиях

$$f(t, 0) = 0, \quad f(t, \nu) \in C_{\Delta}^{(1)},$$

находится путем дифференцирования (1.19) по ν . Тогда, как указано в [17], оно имеет следующий вид:

$$K(t, \nu) = f'_{\nu}(t, \nu). \quad (1.20)$$

Несмотря на то, что сигналы вида (1.18) позволяют сразу получить аналитический вид $K(t, \nu)$, на практике на реальном динамическом объекте до-

вольно сложно формировать сигналы такого типа, поэтому подход, основанный на подаче тестовых сигналов кусочно-линейного типа, более целесообразен.

Перейдем к описанию идентификации ядер K_1 и K_2 , а также с учетом сделанных предположений, к K_{11} и K_{22} . Обратим внимание, что вид слагаемых

$$\int_0^t K_i(s_i) x_i(t - s_i) ds_i, \quad i = \overline{1, 2},$$

содержащих ядра K_1 и K_2 , за исключением индексов, идентичен. Для определенности ограничимся $i = 1$ для ядра K_1 . Аналогичное замечание применимо к

$$\int_0^t \int_0^t K_{11}(s_i, s_i) x_i(t - s_i) x_i(t - s_i) ds_i ds_i, \quad i = \overline{1, 2},$$

и относится к ядрам K_{11} и K_{22} .

Выпишем уравнение для первого интегрального слагаемого

$$\int_0^t K_1(s_1) x_1(t - s_1) ds_1 = f_1(t). \quad (1.21)$$

Для идентификации K_1 в работе [131] предлагается в качестве входного сигнала взять сигнал в виде функции Хевисайда (1.13). Тогда, после подстановки, имеем

$$\int_0^t K_1(s_1) ds_1 = f_1(t). \quad (1.22)$$

Таким образом, при условиях $f_1(0) = 0$, $f_1(t) \in C_{[0, T]}^{(1)}$ решение (1.22) находится путем дифференцирования (1.22) по t и оно имеет вид

$$K_1(t) = f_1'(t).$$

Теперь рассмотрим идентификацию симметричного ядра K_{11} . Выпишем уравнение

$$\int_0^t \int_0^t K_{11}(s_1, s_2) x_1(t - s_1) x_1(t - s_2) ds_1 ds_2 = f_{11}(t). \quad (1.23)$$

В [131] задача идентификации K_{11} в (1.23) решена на базе сигналов (1.18). После подстановки (1.18) в (1.23) получаем

$$\int_{t-\nu}^t \int_{t-\nu}^t K_{11}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = f_{11}(t, \nu). \quad (1.24)$$

При выполнении условий [131]

$$(f_{11}(t, \nu))''_{t\nu} + (f_{11}(t, \nu))''_{\nu^2} \in C_{\Delta}, \quad f_{11}(t, 0) = 0,$$

$$f_{11}(t - \nu, -\nu) = f_{11}(t, \nu), \quad f_{11}(t - \nu, -\nu) = f_{11}(t, \nu),$$

$$(f_{11}(t, \nu))'_{\nu}|_{\nu=0} = 0, \quad t, \nu \in \Delta,$$

решение (1.24)

$$K_{11}(t, t - \nu) = \frac{(f_{11}(t, \nu))''_{t\nu} + (f_{11}(t, \nu))''_{\nu^2}}{2}, \quad t, \nu \in \Delta, \quad (1.25)$$

принадлежит классу непрерывных функций.

Теперь, для идентификации ядра $K_{12}(s_1, s_2)$ в (1.10), будем использовать серию сигналов

$$\begin{cases} x_1(t) = e(t) - e(t - h), \\ x_{2\nu}(t) = e(t - \nu) - e(t - \nu - h), \quad t \in [0, T], \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\begin{cases} x_{1\nu}(t) = e(t - \nu) - e(t - \nu - h), \\ x_2(t) = e(t) - e(t - h), \quad t \in [0, T], \end{cases} \quad (1.27)$$

где h – шаг дискретизации выходного сигнала, $h = T/N$ (N – натуральное число).

Далее, подставим (1.26), (1.27) в (1.10). Получим парное интегральное уравнение Вольтерра I рода:

$$\int_{t-h}^t ds_1 \int_{t-\nu-h}^{t-\nu} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 = f_{12}^{(1)}(t, \nu), \quad (1.28)$$

$$\int_{t-\nu-h}^{t-\nu} ds_1 \int_{t-h}^t K_{12}(s_1, s_2) ds_2 = f_{12}^{(2)}(t, \nu), \quad (1.29)$$

где $t \in [h, T]$, $\nu \in [0, T - h]$, $\nu + h \leq t$. Из (1.28), (1.29) видно, что

$$\overset{(1)}{f_{12}}(t, 0) = \overset{(2)}{f_{12}}(t, 0) = f(t, 0) = 0, \quad t \in [h, T].$$

В (1.28), (1.29) t имеет смысл времени, $t - h \geq 0$, а областью определения искомой функции K_{12} является отрезок $[0, T]$. Таким образом, (1.28), (1.29) имеет смысл только тогда, когда K_{12} известна на предыстории $[0, h]$.

Аналитическое решение уравнения (1.28), (1.29) определяется с помощью метода шагов, разработанного в [17] для одномерного случая с предысторией. Его поиск осуществлен в работе [159].

Коротко приведем описание метода шагов на примере

$$\int_{t-a}^t \varphi(s) ds = f(t), \quad a > 0, \quad t \in [t_0, T], \quad (1.30)$$

$$\bar{\varphi}(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [t_0 - a, t_0]. \quad (1.31)$$

На первом этапе введем разбиение области $[t_0, T]$. Зададим $\Omega_k = [t_0 + (k-1)a, t_0 + ka]$, где $k = \overline{0, N}$, $N = \left[\frac{T-t_0}{a} \right]$ ($[\cdot]$ – символ антъе), $\Omega_{N+1} = [t_0 + Na, T]$. Таким образом Ω_k соответствует промежуточным значениям при $k = \overline{1, N}$, Ω_{N+1} – граничным значениям, а когда $k = 0$ – область Ω_k соответствует промежутку (1.31), т. е. Ω_0 совпадает с предысторией. В итоге $[t_0, T] = \bigcup_{k=1}^{N+1} \Omega_k$.

На втором этапе рассмотрим уравнение (1.30) на каждом из промежутков, начиная с $k = 1$, т. е. когда $t \in \Omega_1$ уравнение можно расписать как

$$\int_{t-a}^{t_0} \varphi_0(s) ds + \int_{t_0}^t \varphi(s) ds = f(t). \quad (1.32)$$

Затем из (1.32) получаем

$$\int_{t_0}^t \varphi(s) ds = f(t) - \int_{t-a}^{t_0} \varphi_0(s) ds = f_1(t), \quad t \in \Omega_1. \quad (1.33)$$

Далее, исходя из того, что (1.33) стандартное уравнение Вольтерра I рода и, полагая $f_1(t) \in C_\Omega^{(1)}$ и $f_1(t_0) = 0$, находим решение (1.33) путем его дифференцирования по t , тогда имеем

$$\bar{\varphi}(t) = f'(t) + \varphi_0(t - a), \quad t \in \Omega_1. \quad (1.34)$$

Рассматривая (1.34) на левом конце промежутка, можно получить условие непрерывности стыковки, т. е. в точке t_0 :

$$f'(t_0) = \varphi(t_0) - \varphi_0(t - a). \quad (1.35)$$

Таким образом, если $\varphi_0(t)$ непрерывна на Ω_0 , то в силу (1.34) $\bar{\varphi}(t)$ непрерывна на Ω_1 . Обозначим это решение как $\varphi_1(t)$.

Далее рассмотрим (1.32) на Ω_2 . Определим $\varphi_2(t)$ через $\varphi_1(t)$, а также получим условия непрерывности стыковки. Повторяя данный процесс N раз, получим непрерывное на $[t_0, T]$ решение для (1.32)

$$\bar{\varphi}(t) = \varphi_k = \sum_{i=0}^{k-1} f'(t - ia) + \varphi_0(t - ka), \quad t \in \Omega_k, \quad k = \overline{1, N+1}, \quad (1.36)$$

с учетом того, что $f(t) \in C_{[t_0, T]}^{(1)}$.

Подобным образом строится решение для (1.28), (1.29). Подробный алгоритм описан в работе [159]. В конечном результате решение имеет вид

$$K_{12}(t, t - \nu) = \sum_{i=1}^{N+1} \mathcal{D}_2 \overset{(1)}{f_{12}}|_{\mathbf{N} \in \Delta_i} + \sum_{i=1}^{N+1} \left(K_{12}^{(i-1)}(t, t - \nu - h) + \right. \\ \left. + K_{12}^{(i-1)}(t - h, t - \nu) - K_{12}^{(i-1)}(t - h, t - \nu - h) \right), \quad (1.37)$$

$$K_{12}(t - \nu, t) = \sum_{i=1}^{N+1} \mathcal{D}_2 \overset{(2)}{f_{12}}|_{\mathbf{N} \in \Delta_i} + \sum_{i=1}^{N+1} \left(K_{12}^{(i-1)}(t - \nu - h, t) + \right. \\ \left. + K_{12}^{(i-1)}(t - \nu, t - h) - K_{12}^{(i-1)}(t - \nu - h, t - h) \right). \quad (1.38)$$

Здесь $\mathbf{N}(t, \nu)$ – точка с декартовыми координатами (t, ν) , а оператор дифференцирования \mathcal{D}_2 определяется следующим образом

$$\mathcal{D}_2 \overset{(1)}{f_{12}}(t, \nu) = - \left(\frac{\partial^2 \overset{(1)}{f_{12}}}{\partial t \partial \nu} + \frac{\partial^2 \overset{(1)}{f_{12}}}{\partial \nu^2} \right), \quad \mathcal{D}_2 \overset{(2)}{f_{12}}(t, \nu) = - \left(\frac{\partial^2 \overset{(2)}{f_{12}}}{\partial t \partial \nu} + \frac{\partial^2 \overset{(2)}{f_{12}}}{\partial \nu^2} \right),$$

$$\bigcup_{k=1}^{N+1} \Delta_k = \{t, \nu : \nu + h \leq t, h \leq t \leq T, \nu \geq 0, h > 0\},$$

где

$$\Delta_k = \{t, \nu : \nu + h \leq t, kh \leq t < (k+1)h\},$$

$$\Delta_{N+1} = \{t, \nu : \nu + h \leq t, Nh \leq t \leq T\},$$

$$\Delta_0 = \{t, \nu : D_1 \cup D_2, \nu \geq 0\}, \quad D_1 = \{t, \nu : \nu \leq t, 0 \leq t < h, h > 0\},$$

$$D_2 = \{t, \nu : t - h < \nu \leq t, h \leq t \leq T, h > 0\}, \quad N = \frac{T}{h}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Данный подход был осуществлен Солодушей С.В. в работе [159]. Он будет развит в пункте 2.1.3 на случай, когда искомой функцией является $K_{123}(s_1, s_2, s_3)$.

1.4. Задача идентификации входных сигналов в полиномах Вольтерра

Современные подходы к математическому моделированию динамических процессов в таких областях, как промышленность и энергетика, опираются на комплексное применение априорной информации и данных, получаемых в режиме наблюдения. Это характерно для сложных динамических объектов, например, энергосистем, которые отличаются разветвленной иерархической структурой [78]. Вектор входных сигналов для таких систем может включать как измеряемые, так и управляющие воздействия, подлежащие идентификации на основе анализа текущих параметров объекта. При отсутствии априорных сведений о структуре объекта результативными оказываются подходы, где для идентификации параметров используются индуктивно полученные знания, извлекаемые из данных с помощью алгоритмов ассоциативного поиска [29; 30]. Это достигается за счет выбора из архива данных векторов, ассоциированных с текущим состоянием системы по заданному критерию близости. Подобная методология, опирающаяся на весь массив ретроспективных знаний об объекте, обеспечивает повышение точности создаваемой математической модели.

Предложенный математический аппарат формирует основу для построения устойчивых моделей сложных энергетических объектов. В главе 2 будет осуществлен поиск решения представленных в этом пункте систем в условиях зашумленных данных. Поскольку это важно для реальных условий, где данные всегда содержат некоторую погрешность.

В случае энергетических систем с векторным входным сигналом $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))^T$ нестационарные динамические свойства можно описать с по-

мощью конечного отрезка интегро-степенного ряда Вольтерра (1.2), (1.3). В (1.3) ядра Вольтерра $K_{i_1 \dots i_n}$ симметричны относительно аргументов s_1, \dots, s_n , соответствующих совпадающим индексам i_1, \dots, i_n , а также функции $K_{i_1 \dots i_n}$ зависят от текущего состояния $t \in [0, T]$, а переменные $0 \leq s_1, \dots, s_n \leq t$ позволяют учесть значения динамических характеристик в предыдущие моменты времени.

Для идентификации отклонений расхода воды и пара в условиях зашумленных данных в рамках задачи регулирования давления на выходе из конденсатора был реализован вычислительный алгоритм, основанный на технологии, которая была построена на базе элементов теории полиномиальных уравнений Вольтерра I рода [21; 103; 157]. Данная технология была применена для идентификации вектора входных сигналов $x(t)$, но в отличие от настоящего исследования, в работе [157] применяется скалярный выход $y(t)$. В данном диссертационном исследовании будет применен векторный выход $y(t)$ и при этом его компоненты будут обладать одним и тем же физическим смыслом.

При автоматическом регулировании технических объектов в энергетике задача определения воздействия $x(t)$ ($p \times 1$), обеспечивающего заданный отклик $y(t)$ ($m \times 1$), может быть редуцирована к решению системы N -й степени благодаря применению моделей в виде полиномов Вольтерра (1.2), (1.3):

$$y_r(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq p} \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1 \dots i_n}^{(r)}(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{j=1}^n x_{i_j}(s_j) ds_j, \quad t \in [0, T]. \quad (1.39)$$

Здесь ядра Вольтерра $K_{i_1 \dots i_n}^{(r)}(t, s_1, \dots, s_n)$ и компоненты выходного сигнала $y_r(t)$, $r = 1, \dots, m$, полагаются известными. В работе [157] компонентами вектора входа энергетического объекта служили изменения расхода вещества и тепловой нагрузки, а в качестве выхода рассматривалось отклонение из энталпии в текущий момент времени t от начального значения. Когда необходимо решить задачу относительно входного сигнала, структурообразующие элементы математической модели, можно выбирать различными способами. Однако подход с формированием вектора отклика $y(t)$ из компонент разно-

го физического смысла (см. [103]) сталкивается с проблемами, связанными с требованием замкнутости системы уравнений, которое подразумевает необходимость равенства числа компонент m в $y(t)$ и p в $x(t)$, то есть $m = p$. Поскольку на практике это условие, как правило, не выполняется, а именно $m \neq p$, для решения проблемы естественно перейти к формированию вектора $y(t)$ из компонент, имеющих один и тот же физический смысл, но отражающих реакцию на сигнал $x(t)$ различных интегральных моделей.

Далее положим, что размерности векторов $x(t)$ и $y(t)$ равны ($p \times 1$) и, учитывая специфику полиномиальных уравнений Вольтерра I рода [21], представим (1.39) (при $N = 2$) в следующем виде:

$$y(t) = V[Z] = \int_0^t K(t, s)x(s)ds + Z[x]. \quad (1.40)$$

Здесь $K(t, s_1)$ – $(p \times p)$ -матрица, $x(t)$ – искомая вектор-функция размерности p , и $y(t)$ – заданная p -мерная вектор-функция, при этом $y(0) = 0$, а оператор $Z[x]$ определен по правилу

$$\begin{aligned} Z[x] = \int_0^t \int_0^t \left[\sum_{j_1=1}^p L_{j_1}^1(t, s_1, s_2)x_1(s_1)x_{j_1}(s_2) + \sum_{j_2=1}^p L_{j_2}^2(t, s_1, s_2)x_2(s_1)x_{j_2}(s_2) + \right. \\ \left. + \sum_{j_3=3}^p L_{j_3}^3(t, s_1, s_2)x_3(s_1)x_{j_3}(s_2) + \dots + \sum_{j_{p-1}=p-1}^p L_{j_{p-1}}^{p-1}(t, s_1, s_2)x_p(s_1)x_{j_{p-1}}(s_2) + \right. \\ \left. + L_{j_p}^p(t, s_1, s_2)x_p(s_1)x_{j_p}(s_2) \right] ds_1 ds_2, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где $j_m = \overline{1, m}$. В формуле (1.41) $L_{j_m}^m(t, s_1, s_2)$ – p -мерные вектор-функции, т.е. $L_{j_m}^m(t, s_1, s_2) = (Z_{j_m 1}^m(t, s_1, s_2), Z_{j_m 2}^m(t, s_1, s_2), \dots, Z_{j_m p}^m(t, s_1, s_2))^T$, той гладкости, которая необходима для проведения всех выкладок.

Если в (1.41) $\det K(t, t)$ не равен нулю на отрезке $t \in [0, T]$, т.е.

$$\det K(t, t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.42)$$

то исследование вопросов существования и единственности решения в классе непрерывных функций для таких систем проводится методами, аналогичными применяемым для интегральных уравнений Вольтерра I рода [21; 103; 157]. Способ исследования заключается в том, чтобы продифференцировать по t

систему (1.40) и переписать полученный результат в виде системы второго рода (выполнимо при условии (1.42)). Полученные таким образом системы сохраняют ключевое свойство полиномиальных уравнений – существование единственного непрерывного решения гарантировано лишь локально, в некоторой окрестности начальной точки.

Таким образом, представленный математический аппарат на основе модифицированных уравнений Вольтерра формирует теоретический фундамент для решения практических задач идентификации в сложных динамических системах, характерных для современной энергетики, обеспечивая необходимую строгость и обоснованность получаемых результатов.

1.5. Динамические уравнения для моделирования теплофизических процессов

В данной диссертационной работе используются содержательные модели [80, с. 8], описывающие теплообменные процессы в ограниченном диапазоне реальных условий (давления и расхода вещества). Ограничения связаны, прежде всего, с режимом функционирования энергетического оборудования, что вызвано сложностью физических явлений, невозможностью охвата различных граничных условий при фазовых переходах теплообменных процессов и высокой степенью зависимости от технических характеристик [113].

Представляемые в данном параграфе динамические уравнения использовались в качестве «эталонных» при верификации интегральных моделей теплофизического профиля на базе полиномов Вольтерра.

Рассмотрим классификацию задач идентификации и автоматического регулирования энергетических объектов в зависимости от типа используемых моделей. Основные направления включают задачи расчета динамических характеристик элементов теплообменных установок, участков пароводяного тракта и установок в целом, а также оценивание и прогнозирование технического состояния тепло- и электроэнергетического оборудования. Последнее охватывает как краткосрочные и перспективные прогнозы параметров режима, так и планирование ремонтно-профилактических работ.

В данной работе используются отклики имитационных моделей технических объектов («эталон»), применяемые для исследования всех перечислен-

ных задач. **Первая модель** представляет собой конечный отрезок разложения $e^{\int_0^t x(s)ds}$ в ряд Тейлора, так что

$$y_{et}^N(t) = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \left(\int_0^t x(s)ds \right)^m, \quad N \geq 3, \quad (1.43)$$

где $y_{et}^N(t)$ – выход системы, а $x(t)$ – входное воздействие. Представление (1.43) соответствует конечному отрезку ряда Вольтерра с постоянными ядрами $\frac{1}{m!}$.

Как показано в работе [20], для такой формы выходного сигнала могут быть сформулированы экстремальные задачи определения оптимальных параметров системы. Важное преимущество эталонной модели (1.43) состоит, во-первых, в возможности изучать свойства динамического объекта, во-вторых, (1.43) отражает экспоненциальный рост нелинейности при $N \rightarrow \infty$.

На описание динамических уравнений, возникающих непосредственно в при решении теплоэнергетических задач остановимся в следующих пунктах.

1.5.1. Динамика энталпии на выходе из элемента теплообменной установки

Как показано в [92; 109], динамику элемента теплообменного аппарата с однофазной несжимаемой средой описывает система алгебро-дифференциальных уравнений:

$$\Delta D(t) \frac{di_0^*}{dz} + D(t) \frac{\partial \Delta i^*(\Delta p, \Delta \mathbf{t}_B)}{\partial z} + g_B \frac{\partial \Delta i^*(\Delta p, \Delta \mathbf{t}_B)}{\partial \mathbf{t}_B} = \quad (1.44)$$

$$= \Delta \kappa(t) h(\theta_0 - \mathbf{t}_{B_0}) + \kappa(t) h(\Delta \theta(z, t) - \Delta \mathbf{t}_B(z, t)),$$

$$\Delta q(t) - g_M c_M \frac{\partial \Delta \theta(z, t)}{\partial t} = \Delta \kappa(t) h(\theta_0 - \mathbf{t}_{B_0}) + \kappa(t) h(\Delta \theta(z, t) - \Delta \mathbf{t}_B(z, t)), \quad (1.45)$$

где t – время (с), z – осевая координата (м), D – расход вещества (кг/с), q – тепловая нагрузка (кВт/м), g – масса (кг/м), h – поверхность теплообмена (м), отнесенные к единице длины; i^* – энталпия (кДж/кг), \mathbf{t}_B , θ – температура потока и стенки (К), c – удельная теплоемкость (кДж/(кг·К)), \mathbf{p} – давление ($\text{Н}/\text{м}^2$), $\kappa = \mathbf{K}_\kappa \cdot D$ – коэффициент теплопередачи (кВт/($\text{м}^2 \cdot \text{К}$)), индексами обозначены: « B » – вещество потока, « M » – материал стенки, « 0 » –

начальные параметры. Знак $\Delta[\cdot]$ означает отклонение от заданных значений, например, $\Delta D = D - D_0$.

Начальные условия системы имеют вид:

$$\Delta i^*(\Delta \mathbf{p}, \Delta \mathbf{t}_B)|_{t=0} = 0, \quad \Delta \mathbf{t}_B(z, t)|_{t=0} = 0, \quad \Delta \theta(z, t)|_{t=0} = 0, \quad (1.46)$$

$$\Delta D(t)|_{t=0} = 0, \quad \Delta q(t)|_{t=0} = 0. \quad (1.47)$$

Границные условия задаются следующим образом:

$$\Delta i^*(\Delta \mathbf{p}, \Delta \mathbf{t}_B)|_{z=0} = \Delta i_{in}^*(t), \quad (1.48)$$

где индекс «*in*» означает значение на входе.

Уравнение связи между параметрами:

$$\Delta i^*(\Delta \mathbf{p}, \Delta \mathbf{t}_B) = c_B \Delta \mathbf{t}_B(z, t) + \left(\frac{\partial i^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\mathbf{t}_B} \Delta \mathbf{p}(t). \quad (1.49)$$

Положим, что параметры по длине (пространственной переменной z) изменяются линейно, а также введем обозначение $i^*(\Delta \mathbf{p}, \Delta \mathbf{t}_B) = i^*(t)$. Далее перейдем от модели (1.44)-(1.49) с распределенными параметрами к описанию объекта с сосредоточенными параметрами

$$\Delta D(t)(i_0^* - i_{in_0}^*) + D(t)(\Delta i^*(t) - \Delta i_{in}^*(t)) + G_B \frac{d\Delta i^*(t)}{dt} = \quad (1.50)$$

$$= \Delta \kappa(t) H(\theta_0 - \mathbf{t}_{B_0}) + \kappa(t) H(\Delta \theta(t) - \Delta \mathbf{t}_B(t)),$$

$$\Delta Q(t) - G_M c_M \frac{d\Delta \theta(t)}{dt} = \Delta \kappa(t) h(\theta_0 - \mathbf{t}_{B_0}) + \kappa(t) h(\Delta \theta(t) - \Delta \mathbf{t}_B(z, t)) \quad (1.51)$$

с соответствующими начальными условиями:

$$\Delta i^*(t)|_{t=0} = 0, \quad \Delta i_{in}^*(t)|_{t=0} = 0, \quad \Delta \mathbf{t}_B(t)|_{t=0} = 0, \quad \Delta \theta(t)|_{t=0} = 0.$$

Здесь $Q = q \cdot l$ – полная тепловая нагрузка (кВт), $G = g \cdot l$ – полная масса (кг), $H = h \cdot l$ – полная поверхность теплообмена (м^2), l – длина рассматриваемого участка (м).

Рассмотрим изменение $\Delta i^*(t)$ при произвольных возмущениях $\Delta D(t)$, $\Delta Q(t)$, $\Delta i_{in}^*(t)$, $\Delta \mathbf{p}(t)$. При допущении, что \mathbf{K}_κ – константа ($\kappa = \mathbf{K}_\kappa \cdot D$), в [112] получено решение (1.49)-(1.51). Заметим, что в начальный момент времени справедливо

$$i_0^* - i_{in_0}^* = \frac{\kappa_0}{D_0} H(\theta_0 - \mathbf{t}_{B_0}) = \mathbf{K}_\kappa H(\theta_0 - \mathbf{t}_{B_0}) = \frac{Q_0}{D_0},$$

с учетом которого система (1.50), (1.51) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d\Delta i^*(t)}{dt} + (a_1\Delta i^*(t) + b_1\Delta\theta(t)) D(t) = g(t), \quad (1.52)$$

$$\frac{d\Delta\theta(t)}{dt} + (a_2\Delta i^*(t) + b_2\Delta\theta(t)) D(t) = \omega(t). \quad (1.53)$$

В (1.52), (1.53) приняты обозначения

$$a_1 = \frac{1}{G_B} \left(1 + \frac{\mathbf{K}_\kappa H}{c_B} \right), \quad a_2 = -\frac{\mathbf{K}_\kappa H}{G_B c_B c_M}, \quad b_1 = -\frac{\mathbf{K}_\kappa H}{G_B}, \quad b_2 = \frac{\mathbf{K}_\kappa H}{G_M c_M},$$

$$g(t) = \frac{D(t)}{G_B} (\Delta i_{in}^*(t) - \mathbf{K}_\kappa H \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{p}(t)), \quad \mathbf{K}_p = -\frac{1}{c_B} \left(\frac{\partial i^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{t_B},$$

$$\omega(t) = \frac{1}{G_M c_M} \Delta Q(t) - \frac{Q_0}{D_0 G_M c_M} \Delta D(t) + \frac{\mathbf{K}_\kappa H \mathbf{K}_p}{G_M c_M} D(t) \Delta \mathbf{p}(t).$$

Данная модель позволяет исследовать динамику изменения энталпии $\Delta i^*(t)$ для входных возмущений произвольного вида. В частности, для случая скалярного выходного сигнала при векторных входных возмущениях в [112] получено решение:

$$\Delta i^*(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t \left(\Delta Q(\eta) - \frac{Q_0}{D_0} \Delta D(\eta) \right) \left(e^{-\lambda_1 \frac{\int \limits_{\eta}^t D(\zeta) d\zeta}{\eta}} - e^{-\lambda_2 \frac{\int \limits_{\eta}^t D(\zeta) d\zeta}{\eta}} \right) d\eta, \quad (1.54)$$

где λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения системы (1.52), (1.53). Практическая значимость данной модели подтверждается расчетами для реальных параметров теплообменного оборудования. Модель (1.54) была введена Э.А. Таировым и рассматривалась в работах [111; 112].

Если интерпретировать модель (1.54) как модель типа «вход-выход», то в качестве входных сигналов будем рассматривать $x_1(t) = \Delta D(t)$, $x_2(t) = \Delta Q(t)$, а на выходе – $y(t) = \Delta i^*(t)$.

1.5.2. Динамика давления и температуры вещества на локальном участке пароводяного тракта крупной теплоэнергетической системы

В России активная модернизация генерирующих мощностей тепловых электростанций требует точного моделирования их компонентов [90; 91]. Особый интерес представляет анализ работы Назаровской ГРЭС – одного из крупнейших энергопредприятий Восточной Сибири.

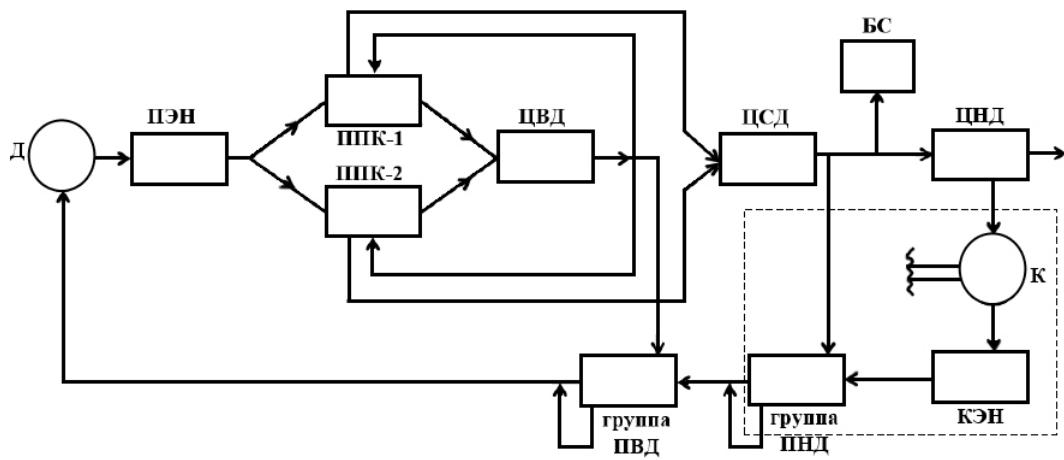


Рисунок 1.4 – Структурная схема пароводяного тракта энергоблока. Пунктиром выделен исследуемый участок, включающий конденсатор К типа 80-КЦС-1 и подогреватель низкого давления ПНД-1

На Рисунке 1.4 представлена упрощенная схема энергоблока. Его работу можно описать следующим образом. На начальном этапе работы энергоблока термический деаэратор (Д) обеспечивает удаление растворенных газов из питательной воды. Вода, прошедшая деаэрацию, подается в систему питательных электронасосов (ПЭН), которые обеспечивают стабильный поток и необходимое давление для дальнейшего движения воды к котлам. Из ПЭН вода одновременно направляется в два прямоточных паровых котла (ППК-1 и ППК-2), которые нагревают воду и преобразуют ее в пар. Пар, образующийся в обоих котлах, поступает в цилиндр высокого давления (ЦВД) и цилиндр среднего давления (ЦСД). От ЦВД пар направляется к группе подогревателей высокого давления (ПВД), где входящая вода подогревается с использованием остаточного тепла, таким образом повышая общую эффективность системы. Нагретая вода из ПВД возвращается в деаэратор (Д), замыкая первый круг. Пар из ЦСД направляется в цилиндр низкого давления (ПНД), который завершает процесс преобразования тепловой энергии в механическую работу. После работы в ПНД, остаточный пар поступает в конденсатор (К), где он охлаждается и конденсируется. Для охлаждения пара в конденсатор подается вода из реки. Эта охлаждающая вода забирает тепло, благодаря чему пар эффективно превращается обратно в жидкость. Конденсированная вода собирается в конденсаторе и перекачивается системой.

мой конденсатных насосов (КЭН) обратно в группу подогревателей низкого давления (ПНД). Оттуда вода направляется в ПВД, замыкая второй круг и обеспечивая повторное использование рабочей жидкости в системе. Таким образом, система энергоблока функционирует благодаря эффективным замкнутым циклам, обеспечивая преобразование энергии и минимизируя потери, при этом используя внешние ресурсы, такие как вода из реки.

Построение математической модели для данного энергоблока представляет собой ресурсоемкую задачу, сложность которой обусловлена использованием большого числа дифференциальных уравнений и замыкающих соотношений (а именно около ста дифференциальных уравнений и пятисот алгебраических связей). Реализация и разработка имитационной модели была выполнена коллективом авторов в составе Э.А. Таирова, А.А. Логинова и В.Ф. Чистякова в виде ПВК «Р150». Созданный вычислительный инструментарий основан на расширении и модернизации модели энергоблока Иркутской ТЭЦ-10 [110]. ПВК «Р150» является цифровой тенью [37] реального энергоблока Назаровской ГРЭС мощностью 135 МВт.

Для анализа поведения системы требуется математическое описание ее динамики. Далее представлен подход получения соответствующих моделей для исследуемого участка [110].

Рассмотрим уравнение материального баланса для парового пространства конденсатора

$$\frac{dM_s}{dt} = D_{s,T} + \sum_j D_{s,j} + D_{\text{воз}} - D_{s,\text{эж}} - D_{\text{k}}, \quad (1.55)$$

где M_s – масса вещества парового пространства (кг), $D_{s,T}$ – расход поступающего пара за последней ступенью турбины (кг/с), $\sum_j D_{s,j}$ – суммарный сброс пара из дополнительных отборов (кг/с), $D_{\text{воз}}$ – присосы воздуха в паровое пространство через неплотности (кг/с), $D_{s,\text{эж}}$ – расход пара и воздуха, отсасываемых эжекторами (кг/с), D_{k} – массовая скорость конденсации пара (кг/с).

Скорость конденсации можно задать как отношение тепла Q (кВт), отдаваемого в единицу времени охлаждающей воде, к величине удельной теплоты

парообразования \mathbf{r} (кДж/кг):

$$D_{\kappa} = \frac{Q}{\mathbf{r}} = \frac{kF(\mathbf{t}_s - \bar{\mathbf{t}}_w)}{\mathbf{r}}, \mathbf{r} = i^*_s - i^*_w, \quad (1.56)$$

где k – коэффициент теплопередачи между паром ($\text{кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$), находящимся при температуре насыщения $\mathbf{t}_s(\mathbf{p})$ ($^{\circ}\text{C}$), и охлаждающей водой, $\bar{\mathbf{t}}_w$ – средняя температура охлаждающей воды ($^{\circ}\text{C}$), F – поверхность теплообмена (м^2), i^* – энталпия (кДж/кг). Уравнение теплового баланса в паровом пространстве конденсатора получается умножением слагаемых уравнения (1.55) на соответствующие удельные теплосодержания:

$$\frac{dM_s i^*_s}{dt} = D_{s,\mathbf{T}} i^*_{s,\mathbf{T}} + \sum_j (D_{s,j} i^*_{s,j}) + D_{\text{воз}} i^*_{\text{воз}} - D_{s,\text{эж}} i^*_{s,\text{эж}} - kF(\mathbf{t}_s - \bar{\mathbf{t}}_w). \quad (1.57)$$

Представим

$$M_s = \rho_s V_s, \quad (1.58)$$

где ρ_s – плотность пара ($\text{кг}/\text{м}^3$), V_s – объем пара (м^3), а после воспользуемся уравнением идеально-газового приближения

$$\rho_s = \frac{\mathbf{p}}{R\mathbf{T}_s}, \quad (1.59)$$

где \mathbf{p} – давление в конденсаторе (Па), R – газовая постоянная ($\text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$).

С учетом соотношений (1.58),(1.59) уравнение (1.55), после некоторых допущений, приобретает следующий вид:

$$\frac{V_s}{R\mathbf{T}_s} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = D_{s,\mathbf{T}} + \sum_j D_{s,j} + D_{\text{воз}} - D_{s,\text{эж}} - D_{\kappa}. \quad (1.60)$$

Полученное уравнение (1.60) описывает динамику давления в конденсаторе при изменениях расходов всех связанных с ним потоков пара с учетом интенсивности конденсации, зависящей от температуры охлаждающей воды и давления парового пространства. Температура охлаждающей воды находится из уравнения энергии:

$$M_w \frac{d\bar{\mathbf{t}}_w}{dt} = kF(\mathbf{t}_s - \bar{\mathbf{t}}_w) - D_w(i^*_w - i^*_{w,in}). \quad (1.61)$$

Перепишем тоже самое, но в терминах температуры:

$$M_w c_w \frac{d\bar{\mathbf{t}}_w}{dt} = kF c_w (\mathbf{t}_s - \bar{\mathbf{t}}_w) - D_w c_w (\mathbf{t}_w - \mathbf{t}_{w,in}), \quad (1.62)$$

где M_w – масса воды в объеме трубного пучка.

Материальный баланс в ПНД описывается уравнениями

$$\frac{dM_s}{dt} = D_s - D_{w,\text{конд}}, \quad \frac{dM_w}{dt} = D_{w,\text{конд}} - D_{s,\text{нас}}, \quad (1.63)$$

где

$$D_{w,\text{конд}} = \frac{kF(\mathbf{t}_s - \bar{\mathbf{t}}_w)}{i_{s,in}^* - i_w^*(\mathbf{p})}.$$

Баланс энергии для пара и воды основного конденсатора в ПНД описывается уравнениями

$$M_s \frac{di_s^*}{dt} = D_s(i_{s,in}^* - i_s^*) - kF(\mathbf{t}_{s\text{ПНД}} - \bar{\mathbf{t}}_{w\text{ПНД}}), \quad (1.64)$$

$$M_w c_w \frac{d\bar{\mathbf{t}}_{w\text{ПНД}}}{dt} = D_w c_w (\mathbf{t}_{w\text{ПНД,in}} - \mathbf{t}_{w\text{ПНД}}) + kF(\mathbf{t}_{s\text{ПНД}} - \bar{\mathbf{t}}_{w\text{ПНД}}). \quad (1.65)$$

В терминах модели «вход-выход» для (1.60) – (1.65) будем рассматривать следующие характеристики: в качестве отклика $y(t)$ выберем изменения температуры воды непосредственно в конденсаторе: $y(t) = \Delta \mathbf{t}_w = \Delta \mathbf{t}_1$ и ПНД: $y(t) = \Delta \mathbf{t}_{w\text{ПНД}} = \Delta \mathbf{t}_2$, а также изменение давления в конденсаторе: $y(t) = \Delta \mathbf{p}_w = \Delta \mathbf{p}$. Изменение физической величины обозначено знаком $\Delta[\cdot]$, под которым понимается отклонение выбранных показателей от их стационарных значений. В качестве входных сигналов выбраны изменение расхода воды $x(t) = \Delta D_{w,\text{конд}} = \Delta D_w$ и пара $x(t) = \Delta D_{s,\text{конд}} = \Delta D_s$ в конденсаторе.

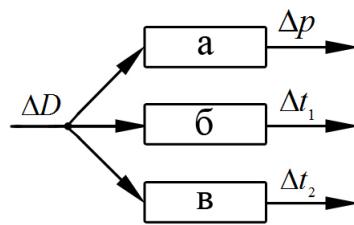


Рисунок 1.5 – Блок-схема модели с вариантами входных воздействий: расход воды ΔD_w или пара $\Delta D_{s\text{нас}}$. Выходные воздействия: изменение давления Δp , изменения температур Δt_1 , Δt_2

Таким образом, графически описать построение моделей можно с помощью Рисунков 1.5 – 1.7, на которых представлены структурные схемы для двух случаев моделирования:

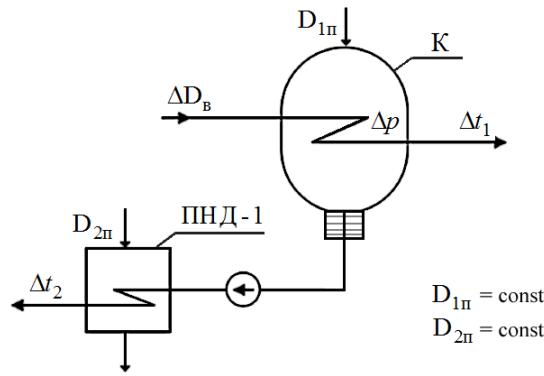


Рисунок 1.6 – Схема участка с входным сигналом ΔD_w (изменение расхода воды)

- 1) фиксированы значения расхода пара $D_{1s} = 45,51$ кг/с и $D_{2s} = 2,03$ кг/с, входной сигнал – изменение расхода воды ΔD_w (см. Рисунок 1.6);
- 2) фиксированы значения расходов пара D_{2s} и воды $D_w = 11562,2$ кг/с, входной сигнал – изменение расхода пара ΔD_{1s} (см. Рисунок 1.7).

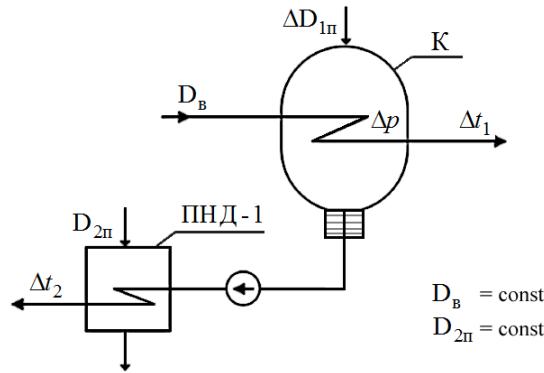


Рисунок 1.7 – Схема участка с входным сигналом ΔD_{1s} (изменение расхода пара)

В обоих случаях выходными параметрами выступают изменение давления Δp и изменения температур Δt_1 , Δt_2 .

На Рисунке 1.5 представлен случай скалярного входа и векторного выхода, буквами **а**, **б**, **в** условно выделены разные модели, которые будут далее применены в работе при апробации построенных моделей. Эта нумерация сохранена при описании соответствующих вычислительных экспериментов.

1.6. Выводы к первой главе

Несмотря на всестороннее исследование задач нелинейной динамики моделирования на основе интегро-степенных рядов Вольтерра, многие теоретические и практические вопросы нуждаются в дальнейших исследованиях.

В частности, существует потребность в новых методах решения задач построения автоматических систем управления нелинейной динамики, которые формулируются как последовательность обратных задач непараметрической идентификации динамики сложных технических объектов. Подобные объекты и их системы обладают следующими признаками:

- 1) статистический материал, способный обеспечить получение динамических характеристик, отсутствует;
- 2) моделирование на реальном техническом объекте существенно затрудняется или в принципе невозможно;
- 3) широкий диапазон состояний, характеризующийся нелинейностью и нестационарностью переходных характеристик.

В первой главе предлагается подход к определению функций, имеющих смысл переходных характеристик, основанный на задании физически реализуемых в теплоэнергетике тестовых входных сигналов специального вида.

К наиболее значимым результатам первой главы можно отнести следующее:

1. Постановка и исследование новых задач восстановления несимметричных ядер Вольтерра на основе сигналов с фронтом нарастания и сигналов минимальной длительностью h (в виде комбинаций функций Хевисайда).
2. Развитие задачи восстановления векторных входных сигналов в задачах диагностики и контроля технических объектов на основе нелинейных интегральных уравнений комбинированного типа, отклик в которых имеет один и тот же физический смысл.

Глава 2. Интегральные уравнения Вольтерра I рода в задаче идентификации нелинейной динамики

В этой главе рассматривается численное решение интегральных уравнений с переменными верхним и нижним пределами. Рассмотрены два типа интегральных уравнений. Первый тип уравнений возникает в результате применения кусочно-линейных тестовых сигналов вида (1.6), а второй – при использовании кусочно-постоянных сигналов в виде комбинаций функций Хевисайда с отклоняющимся аргументом (1.26), (1.27). Используемые кусочно-постоянные сигналы, введенные ранее в работе [102], обладают минимальной длительностью h , где h – шаг сетки дискретизации. Представленные алгоритмы численного решения могут быть развиты на случай, когда эти величины отличны друг от друга, а именно, когда шаг дискретизации меньше, чем длительность сигнала.

В первом случае выбор сигналов из класса кусочно-линейных функций обусловлен техническими возможностями реальных динамических систем в теплоэнергетике и отражает факт постепенного (линейного) характера изменения входного сигнала. Параметр ν отражает длительность (время), с которой сигнал достигает требуемого в тестовом испытании постоянного значения.

В работе [107] рассмотрен входной сигнал, имеющий не только фронт нарастания, но и фронт убывания, которые выбирались как фиксированные величины (константы). Получено, что применение такого вида сигналов в задаче идентификации стационарных ядер Вольтерра $K(t-s)$ позволяет получить явные формулы обращения. Однако для задачи идентификации $K(t, s)$ этот подход неприменим. Данное диссертационное исследование развивает предыдущий подход к решению задачи идентификации ядер. Будем полагать, что фронт убывания в тестовом сигнале отсутствует, а фронт нарастания (величина ν) является переменным, т.е. $0 \leq \nu \leq t \leq T$. Подобное предположение позволило расширить область применения сигналов выбранного типа и реализовать вычислительные процедуры для идентификации нестационарного ядра $K(t, s)$ (пункт 2.1.1) и стационарного ядра $K(s_1, s_2)$ (пункт 2.1.2).

Исследование второго вида интегральных уравнений, основанного на применении кусочно-постоянных сигналов, развивает численные методы решения одномерного интегрального уравнения с предысторией [131]. В пункте 2.1.2 представлены численные алгоритмы, основанные на применении метода Рунге-Кутта третьего порядка.

В пункте 2.2 рассматривается задача восстановления векторного входного сигнала. Пункт 2.2.1 посвящен идентификации входных сигналов на откликах, отягощенных погрешностями, а пункт 2.2.2 – восстановлению входного сигнала в квадратичном и кубическом полиномах Вольтерра.

2.1. Идентификация ядер Вольтерра в уравнениях с двумя переменными пределами интегрирования

В данном пункте представлены три пункта, каждый из которых посвящен различным аспектам численного моделирования и идентификации функций ядер в интегральных уравнениях. Первый пункт фокусируется на построении нестационарной интегральной модели с использованием кусочно-линейных сигналов в скалярном случае. Второй пункт расширяет этот подход, рассматривая интегральные модели в векторном случае, где акцент делается на взаимодействии нескольких входных сигналов и их влиянии на выходные функции. Третий пункт посвящен идентификации несимметричных ядер в квадратичных и кубических полиномах Вольтерра с помощью кусочно-постоянных тестовых сигналов.

2.1.1. Методы средних прямоугольников и Product Integration в задаче идентификации нестационарного ядра. Анализ сходимости разностных схем

Для построения вычислительных алгоритмов введем равномерную сетку:

$$t_i = ih, \quad i = \overline{1, n}, \quad n = \left[\frac{T}{h} \right], \quad (2.1)$$

и подсетку:

$$t_{j-\frac{1}{2}} = \left(j - \frac{1}{2} \right) h, \quad j = \overline{1, i}. \quad (2.2)$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа $\frac{T}{h}$.

ПРИМЕНЕНИЕ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ СРЕДНИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Для нахождения решения сеточного аналога уравнения (1.7) относительно $K^h(t_i, t_{j-\frac{1}{2}})$ будем использовать метод средних прямоугольников. Этот метод позволяет аппроксимировать интегралы, заменяя их суммами, при этом учитывается соотношение, заданное следующим образом:

$$\frac{t_{l-\frac{1}{2}}}{t_j} = \frac{(l - \frac{1}{2})h}{jh} = \frac{l - \frac{1}{2}}{j}.$$

В результате применения метода, мы получаем следующее равенство, которое описывает зависимость между переменными:

$$h \sum_{l=1}^j \frac{l - \frac{1}{2}}{j} K^h(t_i, t_{l-\frac{1}{2}}) + h \sum_{l=j+1}^i K^h(t_i, t_{l-\frac{1}{2}}) = g(t_i, t_j), \quad (2.3)$$

$$i > j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, i-1}.$$

Для случая, когда $t_i = t_j$ (т. е. $i = j$), сеточный аналог уравнения (1.7) принимает более простую форму:

$$h \sum_{l=1}^i \frac{l - \frac{1}{2}}{i} K^h(t_i, t_{l-\frac{1}{2}}) = g(t_i, t_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

Для СЛАУ (2.3), (2.4) можно сформулировать следующую теорему, которая была представлена автором диссертации в работе [100]. Ее доказательство базируется на проверке условий Крамера [70].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть в задаче (2.3), (2.4) матрица коэффициентов имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

тогда

$$A_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2i} & \frac{3}{2i} & \frac{5}{2i} & \dots & \frac{2i-1}{2i} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.6)$$

Тогда система

$$AK^h = G, \quad (2.7)$$

где

$$K^h = \left(K_{1,\frac{1}{2}}^h, K_{2,\frac{1}{2}}^h, K_{2,\frac{3}{2}}^h, K_{3,\frac{1}{2}}^h, \dots, K_{n,\frac{2n-1}{2}}^h \right),$$

$$G = \left(\frac{1}{h} g_{1,1}^h, \frac{1}{h} g_{2,1}^h, \frac{1}{h} g_{2,2}^h, \frac{1}{h} g_{3,1}^h, \dots, \frac{1}{h} g_{n,n}^h \right),$$

имеет единственное решение, представимое в виде

$$K^h(t_i, t_{i-\frac{1}{2}}) = -\frac{2(i-1)}{h} g(t_i, t_{i-1}) + \frac{2i}{h} g(t_i, t_i), \quad i = j, \quad (2.8)$$

$$K^h(t_i, t_{j-\frac{1}{2}}) = -\frac{2(j-1)}{h} g(t_i, t_{j-1}) + \frac{6j}{h} g(t_i, t_j) - \frac{4i}{h} g(t_i, t_i), \quad i = j+1, \quad (2.9)$$

$$K^h(t_i, t_{j-\frac{1}{2}}) = -\frac{2(j-1)}{h} g(t_i, t_{j-1}) + \frac{6j}{h} g(t_i, t_j) + \\ + \frac{8}{h} \sum_{l=j+1}^{i-1} (-1)^{l+j} l \cdot g(t_i, t_l) + \frac{4i \cdot (-1)^{i+j}}{h} g(t_i, t_i), \quad i \geq j+2. \quad (2.10)$$

Доказательство. Покажем, что условие (2.5), (2.6) для (2.3), (2.4) выполняется. Для этого определим матрицу коэффициентов для (2.3), (2.4), которая имеет блочный вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{A}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{A}_n \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Блоки (2.11) определяются как

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2i} & \frac{3}{2i} & \frac{5}{2i} & \dots & \frac{2i-1}{2i} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.12)$$

Далее приведем (2.12) к треугольному виду и получим (2.6).

Теперь убедимся, что матрица (2.5), (2.6) обеспечивает замкнутость и разрешимость системы (2.17). Для доказательства замкнутости необходимо,

чтобы число уравнений совпадало с числом неизвестных. Продемонстрируем, что это условие выполняется для (2.3), (2.4). Покажем, что количество уравнений соответствует числу неизвестных переменных.

Рассмотрим ядро $K(t, s)$, которое является несимметричным относительно t и s , причем $0 \leq s \leq t \leq T$. Сеточный аналог $K^h(t_i, t_{j-\frac{1}{2}})$, $j \leq i$, можно представить в виде треугольной матрицы размерности $(n \times n)$. С учетом индексов i и j для дискретизации временных точек, где $i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, i}$, можем подсчитать количество неизвестных значений. В данном случае количество неизвестных равно $\frac{n(n+1)}{2}$.

Далее проведем подсчет числа уравнений, присутствующих в уравнениях (2.3), (2.4). Легко заметить, что подсчет числа уравнений определяется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1 = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что количество искомых значений в точности соответствует числу уравнений, составленных в системе (2.3), (2.4). Это говорит о замкнутости системы.

Для доказательства разрешимости системы (2.17), достаточно показать, что матрица A является невырожденной, т.е. ее определитель не равен нулю. Определитель блочно-диагональной матрицы A вычисляется как произведение определителей ее диагональных блоков, т. е.

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \dots \cdot \det A_n.$$

Проверим далее, что каждый из определителей блоков A_i также не равен нулю. Найдем определители треугольных матриц A_i по следующей формуле:

$$\det A_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2i} = \prod_{l=1}^i \frac{1}{2l} = \frac{1}{(2i)!!}. \quad (2.13)$$

С учетом блочной структуры и формулы (2.13), определитель матрицы A равен:

$$\det A = \prod_{i=1}^n \prod_{l=1}^i \frac{1}{2l} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2i)!!}. \quad (2.14)$$

Из (2.14) видно, что $\det A \neq 0$, что свидетельствует о невырожденности системы (2.17).

Таким образом, система (2.17) является замкнутой и невырожденной, что подразумевает существование и единственность решения (2.17). Непосредственное применение методов поиска решения приводит к разностной схеме, описанной в виде уравнений (2.8)–(2.10). ■

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА PRODUCT INTEGRATION ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ЯДРА

Применительно к уравнению (1.7) рассмотрим проблему поиска интегралов от ядер Вольтерра с помощью метода Product Integration. Этот метод был предложен Витто Вольтерра в 1887 году [168] для дифференциальных уравнений, а позднее в 1971 году развит Питером Линцом в работе [149] для интегральных уравнений. В соответствии с приведенными в [149] методическими указаниями и с учетом ранее введенной сетки дискретизации, представленной в уравнениях (2.1), (2.2), можно аппроксимировать уравнение (1.5) следующим образом:

$$\int_0^{ih} K(ih, s) x(s) ds \approx \sum_{l=1}^i x \left(\left(l - \frac{1}{2} \right) h \right) \int_{(l-1)h}^{lh} K(ih, s) ds, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.15)$$

Применяя (2.15), получим сеточный аналог уравнения (1.7). Для этого обозначим интегралы от ядер следующим образом:

$$m_{i,l} = \int_{(l-1)h}^{lh} K(ih, s) ds,$$

В таком случае уравнение (1.7) преобразуется в СЛАУ:

$$\frac{1}{j} \sum_{l=1}^j \left(l - \frac{1}{2} \right) m_{i,l} + \sum_{l=j+1}^i m_{i,l} = g(ih, jh), \quad j = \overline{1, i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.16)$$

где неизвестные величины обозначены через $m_{i,j}$.

Применительно к (2.16) можно сформулировать следующую теорему, полученную автором в работе [100].

ТЕОРЕМА 2. Пусть в задаче (2.16) матрица коэффициентов имеет вид (2.5), (2.6). Тогда система

$$AM = F, \quad (2.17)$$

где $M = (m_{1,1}, m_{2,1}, m_{2,2}, m_{3,1}, \dots, m_{n,n})^T$, $F = (g_{1,1}^h, g_{2,1}^h, g_{2,2}^h, g_{3,1}^h, \dots, g_{n,n}^h)^T$, имеет единственное решение, представимое в виде

$$m_{i,i} = -2(i-1) \cdot g(t_i, t_{i-1}) + 2i \cdot g(t_i, t_i), \quad i = j, \quad (2.18)$$

$$m_{i,j} = -2(j-1) \cdot g(t_i, t_{j-1}) + 6j \cdot g(t_i, t_j) - 4i \cdot g(t_i, t_i), \quad i = j+1, \quad (2.19)$$

$$m_{i,j} = -2(j-1) \cdot g(t_i, t_{j-1}) + 6j \cdot g(t_i, t_j) + \quad (2.20)$$

$$+ 8 \sum_{l=j+1}^{i-1} (-1)^{l+j} l \cdot g(t_i, t_l) + 4i \cdot (-1)^{i+j} \cdot g(t_i, t_i), \quad i \geq j+2.$$

Схема доказательства теоремы 2 аналогична доказательству теоремы 1.

Рассмотрим подробнее сходимость метода (2.8)–(2.10).

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ (2.8)–(2.10)

Для исследования сходимости разностной схемы рассмотрим подход, основанный на разложении функций в ряд Тейлора в окрестности точки.

Сформулируем следующую теорему, которая была представлена автором в работе [5].

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия: $K(t, \nu) \in C^{(1)}$, $g(t, \nu) \in C_{\Delta}^{(1)}$, $g(t, \nu) \in C_{\Delta}^{(2)}$. Тогда приближенное решение (2.8)–(2.10) сходится к сеточному аналогу точного решения (1.7) со скоростью $O(h)$.

Доказательство. Для краткости в доказательстве сходимости разностной схемы (2.8)–(2.10) сосредоточимся на разборе только одной из этих схем, а именно на (2.8). Для анализа функции в данной дискретной модели важно учесть ее локальные свойства, которые можно оценить при помощи формулы Тейлора. В нашем случае будем рассматривать функции $g(t_i, t_{i-1})$ и $g(t_i, t_i)$ в окрестности точки M_0 с координатами $\left(t_{i-\frac{1}{2}}, \nu_{i-\frac{1}{2}}\right)$, которые с учетом выбранной сетки могут быть представлены как $\left((i - \frac{1}{2})h, (i - \frac{1}{2})h\right)$.

Таким образом, можно записать разложения для $g(t_i, t_{i-1})$ и $g(t_i, t_i)$. Это разложение включает в себя первый и второй члены разложения функции.

Применим формулу Тейлора для разложения функции $g(t, \nu)$ в окрестности точки M_0 и получим

$$\begin{aligned} g(ih, (i-1)h) &= g\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h, \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right) + \\ &+ \sum_{l=1}^2 \frac{h^2}{l!} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} \right)^l \right]_{M_0}, \\ g(ih, ih) &= g\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h, \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right) + \\ &+ \sum_{l=1}^2 \frac{h^2}{l!} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} \right)^l \right]_{M_0}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Подставим (2.21) в уравнение (2.8) и упростим полученное выражение. В результате подстановки и соответствующих преобразований имеем:

$$\begin{aligned} K^h \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right)h \right) &= \frac{-2(i-1)}{h} \cdot g(ih, (i-1)h) + \frac{2i}{h} \cdot g(ih, ih) = \\ &= \left[\frac{-2(i-1)}{h} \cdot g(t, \nu) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} - \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} \right) + \right. \\ &+ \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} - \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} \right)^2 + \frac{2i}{h} \cdot g(t, \nu) + \\ &+ \left. \frac{h}{2} \left(\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} \right) + \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} \right)^2 \right]_{M_0}. \end{aligned}$$

Далее раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. После соответствующих арифметических преобразований имеем:

$$\begin{aligned} K^h \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right)h \right) &= \left[(-i+1+i) \cdot \frac{2}{h} \cdot g(t, \nu) + (-i+1+i) \cdot \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} + \right. \\ &+ (i-1+i) \cdot \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} + (-i+1+i) \cdot \frac{h}{4} \cdot \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t^2} + \\ &+ (-i+1+i) \cdot \frac{h}{4} \cdot \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2} + (i-1+i) \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t \partial \nu} \left. \right]_{M_0} = \\ &= \left[\frac{2}{h} \cdot g(t, \nu) + \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} + (2i-1) \cdot \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} + \right. \\ &+ \left. \frac{(2i-1)h}{2} \cdot \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t \partial \nu} + \frac{h}{4} \cdot \left(\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2} \right) \right]_{M_0}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Как видно из (2.22), в вычислении разностного аналога в точке $(ih, (i - \frac{1}{2})h)$ участвуют значения функции $g(t, \nu)$, $\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t}$, $\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu}$, $\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t \partial \nu}$, которые с учетом

(1.7) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 g(t, \nu) &= \frac{1}{\nu} \int_0^\nu s K(t, s) ds + \int_\nu^t K(t, s) ds, \\
 g'_t &= \frac{1}{\nu} \int_0^\nu s K'_t(t, s) ds + K(t, t) + \int_\nu^t K'_t(t, s) ds, \\
 g'_\nu &= -\frac{1}{\nu^2} \int_0^\nu s K(t, s) ds.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Отметим, что $(g'_t)'_\nu = (g'_\nu)'_t$, поскольку

$$(g'_t)'_\nu = -\frac{1}{\nu^2} \int_0^\nu s K'_t(t, s) ds + \frac{1}{\nu} \cdot \nu K'_t(t, s)|_{s=\nu} - K'_t(t, s)|_{s=\nu} = -\frac{1}{\nu^2} \int_0^\nu s K'_t(t, s) ds,$$

а также

$$(g'_\nu)'_t = -\frac{1}{\nu^2} \int_0^\nu s K'_t(t, s) ds,$$

из равенства правых частей следует равенство левых. Таким образом получаем, что

$$g''_{t\nu} = -\frac{1}{\nu^2} \int_0^\nu s K'_t(t, s) ds. \tag{2.24}$$

Теперь выпишем функции $g(t, \nu)$, $\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t}$, $\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu}$, $\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t \partial \nu}$ в точке M_0 . Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
 g|_{M_0} &= \frac{2}{h(2i-1)} \int_0^{(i-\frac{1}{2})h} s K(t, s) ds, \\
 g'_t|_{M_0} &= \frac{2}{h(2i-1)} \int_0^{(i-\frac{1}{2})h} s K'_t(t, s) ds + K(t, t)|_{M_0}, \\
 g'_\nu|_{M_0} &= -\frac{4}{h^2(2i-1)^2} \int_0^{(i-\frac{1}{2})h} s K(t, s) ds, \\
 g''_{t\nu}|_{M_0} &= -\frac{4}{h^2(2i-1)^2} \int_0^{(i-\frac{1}{2})h} s K'_t(t, s) ds.
 \end{aligned}$$

Подставив найденные значения производных и интегралов в выражение (2.22), получаем следующее:

$$\begin{aligned}
K^h \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) &= \left[\frac{2}{h} \cdot \frac{2}{h(2i-1)} \int_0^{\left(i - \frac{1}{2} \right) h} s K(t, s) ds + \right. \\
&+ \frac{2}{h(2i-1)} \int_0^{\left(i - \frac{1}{2} \right) h} s K'_t(t, s) ds + K(t, t) - (2i-1) \cdot \frac{4}{h^2(2i-1)^2} \int_0^{\left(i - \frac{1}{2} \right) h} s K(t, s) ds - \\
&- \frac{(2i-1)h}{2} \cdot \frac{4}{h^2(2i-1)^2} \int_0^{\left(i - \frac{1}{2} \right) h} s K'_t(t, s) ds + \frac{h}{4} \left(\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2} \right) \Big]_{M_0} = \\
&= \left[K(t, t) + \frac{h}{4} \left(\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2} \right) \right]_{M_0} = \\
&= K \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) h, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) + \frac{h}{4} \left[\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2} \right]_{M_0}. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Из правой части (2.25) видно, что разностная схема для K^h отличается от значения K в точке M_0 на слагаемое, которое определяется как

$$\frac{h}{4} \left[\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2} \right]_{M_0}.$$

Следующий шаг заключается в применении формулы Тейлора к функции $K \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) h, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right)$. Разлагая ее в окрестности точки $\left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right)$, имеем

$$K \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) h, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) \approx K \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) - \frac{h}{2} K'_t \left(t, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) \Big|_{t=ih}.$$

Теперь, подставив это разложение в (2.25), получим:

$$\begin{aligned}
K^h \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) - K \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) &\approx \\
&\approx -\frac{h}{2} K'_t \left(t, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) \Big|_{t=ih} + \frac{h}{4} \left[\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2} \right]_{M_0}.
\end{aligned}$$

В итоге имеем оценку:

$$\left| K^h \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) - K \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) \right| = O(h). \blacksquare \tag{2.26}$$

Из оценки (2.26) следует, что метод обладает первым порядком сходимости (при уменьшении шага сетки h погрешность между расчетным и истинным значениями уменьшается линейно). Доказательство сходимости разностных схем (2.9), (2.10) проводится аналогично, при этом оценка сходимости для (2.9), (2.10) равна $O(h)$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА PRODUCT INTEGRATION ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ СЕТОЧНОГО АНАЛОГА СТАЦИОНАРНОГО НЕСИММЕТРИЧНОГО ЯДРА

Для реализации метода Product Integration применим формулу (2.15) к парному интегральному уравнению (1.14), (1.15), что позволит сформировать СЛАУ, которая имеет следующий вид:

$$\sum_{l=i-j+1}^i \sum_{k=1}^{i-j} \frac{i-l+\frac{1}{2}}{j} \int_{(l-1)h}^{lh} ds_1 \int_{(k-1)h}^{kh} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 = f_{12}^{(1)}(t_i, t_j), \quad (2.27)$$

$$\sum_{l=i-j+1}^i \sum_{k=1}^{i-j} \frac{i-l+\frac{1}{2}}{j} \int_{(l-1)h}^{lh} ds_2 \int_{(k-1)h}^{kh} K_{12}(s_1, s_2) ds_1 = f_{12}^{(2)}(t_i, t_j). \quad (2.28)$$

Обозначим интегралы, необходимые для формирования системы уравнений, следующим образом:

$$m_{l,k}^{(p)} = \int_{(l-1)h}^{lh} \int_{(k-1)h}^{kh} K_{12}(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \quad (2.29)$$

где индекс p может принимать значения 1 или 2, где 1 соответствует (2.27), а 2 – (2.28).

Сформулируем следующую теорему, полученную лично автором по аналогии с [100].

ТЕОРЕМА 4. *Пусть в задаче (2.27), (2.28) матрица коэффициентов имеет вид*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{1 \times r_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{2 \times r_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n-2 \times r_{n-2}} & 0 & & 0 \\ A_{n-1 \times r_{n-1}} & & & 0 \\ A_{n \times r_n} & & & \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

zde

тогда система

$$\mathbf{A}M^{(p)} = F^{(p)}, \quad (2.32)$$

тогда $M^{(1)} = \left(m_{2,1}^{(1)}, m_{3,1}^{(1)}, m_{3,2}^{(1)}, \dots, m_{n,n-1}^{(1)} \right)^T$, $M^{(2)} = \left(m_{1,2}^{(2)}, m_{1,3}^{(2)}, m_{2,3}^{(2)}, \dots, m_{n-1,n}^{(2)} \right)^T$,
 $F^{(p)} = \left(f_{2,1}^{(p)}, f_{3,1}^{(p)}, f_{3,2}^{(p)}, \dots, f_{n,n-1}^{(p)} \right)^T$, $p = 1, 2$, имеет единственное решение, представимое в виде

$$m_{i,j}^{(p)} = 8 \sum_{l=j+1}^{i-2} (l-j)(-1)^{i-l} \stackrel{(p)}{f_{12}}(t_l, t_{l-j}) - 6(i-j-1) \stackrel{(p)}{f_{12}}(t_{i-1}, t_{i-j-1}) + \\ + 2(i-j) \stackrel{(p)}{f_{12}}(t_i, t_{i-j}), \quad i > j, \quad j = 1, \quad (2.33)$$

$$m_{i,j}^{(p)} = 8 \sum_{l=j}^{i-2} \sum_{k=l-j}^{l-j+1} k(-1)^{i+j-k} f_{12}^{(p)}(t_l, t_k) + 6 \sum_{k=i-j-1}^{i-j} k(-1)^{i+j-k} f_{12}^{(p)}(t_{i-1}, t_k) + \\ + 2 \sum_{k=i-j}^{i-j+1} k(-1)^{i+j-k} f_{12}^{(p)}(t_i, t_k), \quad i-j > 1, \quad (2.34)$$

$$m_{i,j}^{(p)} = 6 \overset{(p)}{f_{12}}(t_{i-1}, t_1) + 2 \overset{(p)}{f_{12}}(t_i, t_1) - 4 \overset{(p)}{f_{12}}(t_i, t_2), \quad i - j = 1. \quad (2.35)$$

Доказательство. Покажем, что выполняется условие (2.30), (2.31) для (2.27), (2.28). Определим матрицу коэффициентов для (2.27), (2.28), которая

имеет блочный вид

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A_{1 \times r_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{2 \times r_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n-2 \times r_{n-2}} & 0 & & 0 \\ A_{n-1 \times r_{n-1}} & & & 0 \\ A_{n \times r_n} & & & \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Блоки (2.36) определяются как

$$\bar{A}_{i \times r_i} = \begin{pmatrix} \underbrace{0 \dots 0}_{r_i-i} & \underbrace{\frac{1}{2} \dots \frac{1}{2}}_i \\ \underbrace{0 \dots 0}_{r_i-2(i-1)-1} \underbrace{\frac{3}{4} \dots \frac{3}{4}}_{i-1} & \underbrace{\frac{1}{4} \dots \frac{1}{4}}_{i-1} 0 \\ \underbrace{0 \dots 0}_{r_i-3(i-2)-2} \underbrace{\frac{5}{6} \dots \frac{5}{6}}_{i-2} \underbrace{\frac{3}{6} \dots \frac{3}{6}}_{i-2} 0 & \underbrace{\frac{1}{6} \dots \frac{1}{6}}_{i-2} 0 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{2i-1}{2i} \frac{2i-3}{2i} 0 \frac{2i-5}{2i} 0 0 \frac{2i-7}{2i} 0 0 0 \dots & \frac{1}{2i} \underbrace{0 \dots 0}_{i-1} \end{pmatrix}, \quad r_i = \sum_{l=1}^i l, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.37)$$

Далее с применением различных линейных операций и перестановок строк приведем (2.36), (2.37) к треугольному виду и получим (2.30), (2.31).

Теперь убедимся, что матрица (2.30), (2.31) обеспечивает замкнутость и разрешимость системы (2.32). Перейдем к доказательству замкнутости. Полагая, что i и j определяются диапазонами $i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, i}$ соответственно, можем подсчитать количество искомых значений: $n^2 - n$. Расчет количества уравнений, в свою очередь, выглядит следующим образом:

$$2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i 1 = 2 \sum_{i=1}^{n-1} i = n^2 - n.$$

Таким образом, количество искомых значений совпадает с количеством уравнений. Это свидетельствует о замкнутости СЛАУ.

Для доказательства разрешимости системы (2.32), достаточно показать, что матрица \mathbf{A} является невырожденной, т.е. ее определитель не равен нулю. Продемонстрируем, что (2.32) является невырожденной при $p = 1$. Для этого

вычислим определитель матрицы через произведение диагональных элементов. Окончательно имеем:

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{2i-2} \cdots \frac{1}{2} \right) = \prod_{i=1}^n \prod_{l=1}^i \frac{1}{2l} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2i)!!}.$$

Учитывая полученное равенство, можно заключить, что $\det \mathbf{A} \neq 0$. Это свидетельствует о невырожденности матрицы и, следовательно, о существовании единственного решения для системы (2.32) при $p = 1$ (аналогичные рассуждения применимы и для $p = 2$). Непосредственное применение методов поиска решения приводит к разностной схеме, описанной в виде уравнений (2.33)–(2.35). ■

Следует отметить, что вид сигналов (1.14), (1.15) не позволяет найти элементы $m_{i,i}$, стоящие на диагонали. Выполним их восстановление на сигналах в виде комбинаций функций Хевисайда с отклоняющимися аргументами:

$$\begin{cases} x_{1_\nu}(t) = e(t) - e(t - \nu), \\ x_2(t) = e(t), \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = e(t), \\ x_{2_\nu}(t) = e(t) - e(t - \nu), 0 \leq \nu \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.39)$$

Таким образом, решение для диагональных элементов $m_{i,i}$ методом Product Integration будет иметь вид

$$m_{i,i} = \hat{f}_{12}(t_{i-1}, t_{i-1}) + \overset{(1)}{\hat{f}_{12}}(t_i, t_1) + \overset{(2)}{\hat{f}_{12}}(t_i, t_1) - \hat{f}_{12}(t_i, t_i), \quad (2.40)$$

где $\overset{(1)}{\hat{f}_{12}}(t_i, t_1)$, $\overset{(2)}{\hat{f}_{12}}(t_i, t_1)$, $\hat{f}_{12}(t_i, t_i)$ – отклики на сигналы (2.38), (2.39), $i = \overline{1, n}$.

2.1.2. Метод Рунге-Кутта в задаче идентификации несимметричного ядра

Перейдем к численному решению (1.28), (1.29), построенному путем подстановления сигналов (1.26), (1.27) в (1.10). Для поиска численного решения будем использовать метод типа Рунге-Кутта [141]. Введем на $[h, T]$ следующую равномерную сетку:

$$t_i = ih, \quad i = \overline{1, n}, \quad \nu_j = jh, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad n = \frac{T}{h},$$

$$t_{ip} = t_i + \frac{ph}{m}, \quad p = \overline{1, m}, \quad 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_m \leq 1,$$

$$\nu_{jq} = \nu_j + \frac{qh}{m}, \quad q = \overline{1, m}, \quad 0 < v_1 < v_2 < \dots < v_m \leq 1,$$

где m – число разбиения подсетки. Рассмотрим (1.28), поскольку (1.29) рассматривается аналогично. Полагая $t = t_{ip}$, $\nu = \nu_{jq}$ в (1.28), переходим к системе числовых равенств

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{f}_{12}(t_{ip}, \nu_{jq}) &= \int_{t_{ip}-h}^{t_{ip}} ds_1 \int_{t_{ip}-\nu_{jq}-h}^{t_{ip}-\nu_{jq}} K_{12}(s_1, s_2) ds_2, \\ i &= \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad p = \overline{1, m}, \quad q = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Разбиваем интегралы так, чтобы был выделен «целый» (i -й) узел, т. е.

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{f}_{12}(t_{ip}, \nu_{jq}) &= \int_{t_{ip}-h}^{t_{ip}} ds_1 \int_{t_{ip}-\nu_{jq}-h}^{t_{ip}-\nu_{jq}} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 = \\ &= \int_{t_{ip}-h}^{t_i} ds_1 \int_{t_{ip}-\nu_{jq}-h}^{t_{ip}-\nu_{jq}} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 + \int_{t_i}^{t_{ip}} ds_1 \int_{t_{ip}-\nu_{jq}-h}^{t_{ip}-\nu_{jq}} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 = \\ &= \int_{t_{ip}-h}^{t_i} ds_1 \int_{t_{ip}-\nu_{jq}-h}^{t_i-\nu_j} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 + \int_{t_i}^{t_{ip}} ds_1 \int_{t_{ip}-\nu_{jq}-h}^{t_i-\nu_j} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 + \\ &+ \int_{t_{ip}-h}^{t_i} ds_1 \int_{t_i-\nu_j}^{t_{ip}-\nu_{jq}} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 + \int_{t_i}^{t_{ip}} ds_1 \int_{t_i-\nu_j}^{t_{ip}-\nu_{jq}} K_{12}(s_1, s_2) ds_2. \end{aligned}$$

Аппроксимируем каждый интеграл квадратурными формулами

$$\int_{t_i}^{t_{ip}} \varphi(s) ds = h \sum_{k=1}^m a_{pk} \varphi(t_{ik}), \quad p = \overline{1, m},$$

$$\int_{t_{ip}}^{t_{i+1}} \varphi(s) ds = h \sum_{k=1}^m b_{pk} \varphi(t_{ik}), \quad p = \overline{1, m},$$

с коэффициентами

$$a_{pk} = \int_0^{u_p} L_k(s) ds, \quad b_{pk} = \int_{u_p}^1 L_k(s) ds, \quad p = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (2.41)$$

где

$$L_k(t) = \frac{\omega(t)}{(t - u_k)\omega'(u_k)}, \quad k = \overline{1, m}, \quad \omega(t) = \prod_{k=1}^m (t - u_k).$$

Данные формулы основаны на аппроксимации функции $\varphi(t)$ интерполяционными многочленами Лагранжа m -й степени. С учетом обозначения

$$r = \begin{cases} p - q, & p > q, \\ m + p - q, & p \leq q, \end{cases}$$

$$t_i - \nu_j = t_{i-j}.$$

получаем численную схему для (1.28):

$$\begin{aligned} & h^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{kp} b_{lr} K_{12}^h(t_{i-1,k}, t_{i-j-1,l}) + h^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{kp} a_{lr} K_{12}^h(t_{i-1,k}, t_{i-j,l}) + \\ & + h^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{kp} b_{lr} K_{12}^h(t_{i,k}, t_{i-j-1,l}) + h^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{kp} a_{lr} K_{12}^h(t_{i,k}, t_{i-j,l}) = \overset{(1)}{f}_{12}(t_{ip}, \nu_{jq}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

В случае (1.29) действуем аналогичным образом и получаем

$$\begin{aligned} & h^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{kp} b_{lr} K_{12}^h(t_{i-j-1,k}, t_{i-1,l}) + h^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{kp} a_{lr} K_{12}^h(t_{i-j-1,k}, t_{i,l}) + \\ & + h^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{kp} b_{lr} K_{12}^h(t_{i-j,k}, t_{i-1,l}) + h^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{kp} a_{lr} K_{12}^h(t_{i-j,k}, t_{i,l}) = \overset{(2)}{f}_{12}(t_{ip}, \nu_{jq}). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Таким образом, формулы (2.42), (2.43) представляют из себя СЛАУ, размерностью $m^2 n^2 \times m^2 n^2$. Отметим, что сходимость будет определяться значением m . В пункте 2.3.2. будут рассмотрены примеры с применением формул (2.42), (2.43).

2.1.3. Численное решение линейных многомерных уравнений Вольтерра методом шагов

В данном пункте рассмотрим (1.2), (1.3) в случае стационарности динамической системы в условиях, что $N = 3$ и $p = 3$. Также положим, что задача декомпозиции отклика $y(t)$ на составляющие решена. В данной задаче нас также интересует несимметричное ядро, но теперь оно отвечает за одновременное воздействие трех различных входных сигналов.

Выпишем соответствующее интегральное слагаемое:

$$\int_0^t \int_0^t \int_0^t \varphi(s_1, s_2, s_3) x_1(t - s_1) x_2(t - s_2) x_3(t - s_3) ds_1 ds_2 ds_3 = f(t). \quad (2.44)$$

Здесь $f_{123}(t) = f(t)$ – вклад соответствующего слагаемого в $y(t)$, функция $K_{123}(s_1, s_2, s_3)$ обозначена через $\varphi(s_1, s_2, s_3)$.

Область определения функции φ обозначим через Ω , которая состоит из объединения $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1, 6}$, так что $\Omega = \bigcup_{i=1}^6 \Omega^{(i)}$, при этом

$$\Omega^{(1)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_1 \leq T\},$$

$$\Omega^{(2)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \leq s_1 \leq s_3 \leq s_2 \leq T\},$$

$$\Omega^{(3)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq T\},$$

$$\Omega^{(4)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq s_3 \leq T\},$$

$$\Omega^{(5)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \leq s_3 \leq s_2 \leq s_1 \leq T\},$$

$$\Omega^{(6)} = \{s_1, s_2, s_3 : 0 \leq s_3 \leq s_1 \leq s_2 \leq T\}.$$

Формирование трехмерного континуума $\overset{(i)}{z}(t, \nu, \mu)$, $i = \overline{1, 6}$, в правой части (2.44) реализуется за счет добавления вспомогательного семейства двух параметров ν, μ , таких, что $0 \leq \mu \leq \nu < t \leq T$.

Для идентификации функции φ в подобласти $\Omega^{(1)}$ подставим в (2.44) сигналы вида

$$\begin{cases} x_1(t) = e(t) - e(t - h), \\ x_{2\nu}(t) = e(t - \nu) - e(t - \nu - h), \\ x_{3\mu}(t) = e(t - \mu) - e(t - \mu - h). \end{cases} \quad (2.45)$$

Здесь $e(t)$ – функция Хевисайда вида (1.13). Заметим, что представленный тип сигналов был использован ранее в работе [162] в задаче восстановления интегралов от ядер методом Product Integration.

В оставшихся пяти случаях $s_1, s_2, s_3 \in \Omega^{(i)}$, $i = \overline{2, 6}$, тестовые сигналы формируются за счет перестановки правых частей из (2.45).

Таким образом, за счет выбора входных возмущений в виде (2.45) задача идентификации φ редуцируется к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода:

$$\begin{aligned}
V_{3(1)}\varphi &\equiv \int_{t-h}^t ds_1 \int_{t-\nu-h}^{t-\nu} ds_2 \int_{t-\mu-h}^{t-\mu} \varphi(s_1, s_2, s_3) ds_3 = \overset{(1)}{z}(t, \nu, \mu), \\
V_{3(2)}\varphi &\equiv \int_{t-\nu-h}^{t-\nu} ds_1 \int_{t-h}^t ds_2 \int_{t-\mu-h}^{t-\mu} \varphi(s_1, s_2, s_3) ds_3 = \overset{(2)}{z}(t, \nu, \mu), \\
V_{3(3)}\varphi &\equiv \int_{t-\nu-h}^{t-\nu} ds_1 \int_{t-\mu-h}^{t-\mu} ds_2 \int_{t-h}^t \varphi(s_1, s_2, s_3) ds_3 = \overset{(3)}{z}(t, \nu, \mu), \\
V_{3(4)}\varphi &\equiv \int_{t-\mu-h}^{t-\mu} ds_1 \int_{t-\nu-h}^{t-\nu} ds_2 \int_{t-h}^t \varphi(s_1, s_2, s_3) ds_3 = \overset{(4)}{z}(t, \nu, \mu), \\
V_{3(5)}\varphi &\equiv \int_{t-h}^t ds_1 \int_{t-\mu-h}^{t-\mu} ds_2 \int_{t-\nu-h}^{t-\nu} \varphi(s_1, s_2, s_3) ds_3 = \overset{(5)}{z}(t, \nu, \mu), \\
V_{3(6)}\varphi &\equiv \int_{t-\mu-h}^{t-\mu} ds_1 \int_{t-h}^t ds_2 \int_{t-\nu-h}^{t-\nu} \varphi(s_1, s_2, s_3) ds_3 = \overset{(6)}{z}(t, \nu, \mu).
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Отметим, что понятие решения (2.46) требует уточнения. В силу того, что $t-h \geq 0$ в нижних пределах интегрирования, областью определения искомой функции $\bar{\varphi}$ для каждой из переменных s_1, s_2, s_3 является отрезок $[0, T]$, содержащий полуинтервал $[0, h]$, так что уравнение (2.46) имеет смысл только в том случае, если решение $\bar{\varphi}$ известно при $s_1, s_2, s_3 \in [0, h]$ и $s \in [0, T]$, т. е.

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}(s_1, s_2, s) &= \varphi^{(0)}(s_1, s_2, s), \quad \bar{\varphi}(s_1, s, s_3) = \varphi^{(0)}(s_1, s, s_3), \\
\bar{\varphi}(s, s_2, s_3) &= \varphi^{(0)}(s, s_2, s_3), \quad \bar{\varphi}(s_1, s, s) = \varphi^{(0)}(s_1, s, s), \\
\bar{\varphi}(s, s_2, s) &= \varphi^{(0)}(s, s_2, s), \quad \bar{\varphi}(s, s, s_3) = \varphi^{(0)}(s, s, s_3).
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Их (2.46) для $\nu = \mu = 0$ имеем цепочку равенств $\overset{(1)}{z}(t, \nu, \mu) = \overset{(2)}{z}(t, \nu, \mu) = \overset{(3)}{z}(t, \nu, \mu) = \overset{(4)}{z}(t, \nu, \mu) = \overset{(5)}{z}(t, \nu, \mu) = \overset{(6)}{z}(t, \nu, \mu) = z(t, 0, 0)$.

Введем равномерную сетку с шагом h , так что $Nh = T$, и выполним разбиение правых частей (2.46) на подобласти:

$$\Delta_k = \{t, \nu, \mu : \nu + h \leq t, \mu \leq \nu, kh \leq t < (k+1)h\}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$\Delta_N = \{t, \nu, \mu : \nu + h \leq t, \mu + h \leq t, \mu \leq \nu, t = Nh\},$$

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \{t, \nu, \mu : D_1 \cup D_2, \nu \geq \mu \geq 0\}, \\ D_1 &= \{t, \nu, \mu : 0 \leq \mu \leq \nu \leq t, 0 \leq t < h, h > 0\}, \\ D_2 &= \{t, \nu, \mu : t - h \leq \mu \leq \nu \leq t, h \leq t \leq T, h > 0\}.\end{aligned}$$

Здесь Δ_0 совпадает с предысторией, а также

$$\bigcup_{k=1}^N \Delta_k = \{t, \nu, \mu : \nu + h \leq t, \mu + h \leq t, h \leq t \leq T, \nu \geq \mu \geq 0, h > 0\}.$$

Далее рассмотрим алгоритм для получения искомого решения уравнений (2.46) и (2.47). Этот алгоритм развивает метод шагов для одномерного случая, который описан в работе [131].

Модификация метода шагов. Зададим в трехмерной плоскости точку \mathbf{N} с координатами (t, ν, μ) . Структурная схема алгоритма построения решения включает $N + 1$ шагов. Предполагается, что $\mathbf{N}(t, \nu, \mu) \in \Delta_i$ при фиксированном значении $i = \overline{1, N+1}$. На каждом i -м шаге будем помнить о важных моментах, связанных с разрешимостью уравнений (2.46) и (2.47) в классе непрерывных несимметричных функций на Ω .

A. Проверка условия разрешимости для правых частей $\overset{(i)}{z}(t, \nu, \mu)$, $i = \overline{1, 6}$, которое в классическом случае обычно записывается как $y(0) = 0$.

B. Получение формул, определяющих искомое решение, путем дифференцирования уравнения (2.46) по переменным t , ν и μ .

C. Выявление условий согласования, которые гарантируют непрерывность решения.

Далее рассмотрим данный алгоритм более подробно.

Шаг 1. A. Покажем, что условие разрешимости для (2.46) в начальной точке $\mathbf{N}(h, 0, 0) \in \Delta_1$ выполняется:

$$\begin{aligned}z(t, 0, 0) &= \int_{t-h}^t d\lambda_1 \int_{t-h}^t d\lambda_2 \int_{t-h}^t \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 = \\ &= \int_{t-h}^h d\lambda_1 \int_{t-h}^h d\lambda_2 \int_{t-h}^h \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \int_{t-h}^h d\lambda_1 \int_{t-h}^h d\lambda_2 \int_h^t \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \\ &+ \int_{t-h}^h d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_{t-h}^h \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \int_{t-h}^t d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_h^t \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_h^t d\lambda_1 \int_{t-h}^h d\lambda_2 \int_{t-h}^h \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \int_h^t d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_{t-h}^h \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \\
& + \int_h^t d\lambda_1 \int_{t-h}^h d\lambda_2 \int_h^t \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \int_h^t d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_h^t \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3.
\end{aligned}$$

Учитывая (2.47), получаем

$$\begin{aligned}
z(t, 0, 0) &= \int_{t-h}^h d\lambda_1 \int_{t-h}^h d\lambda_2 \int_{t-h}^h \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \\
& + \int_{t-h}^h d\lambda_1 \int_{t-h}^h d\lambda_2 \int_h^t \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \int_{t-h}^h d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_{t-h}^h \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \\
& + \int_{t-h}^t d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_h^t \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \int_h^t d\lambda_1 \int_{t-h}^h d\lambda_2 \int_{t-h}^h \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \\
& + \int_h^t d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_{t-h}^h \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \int_h^t d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_h^t \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 + \\
& + \int_h^t d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_h^t \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеет место

$$\begin{aligned}
& \int_h^t d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_h^t \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 = z(t, 0, 0) - \\
& - \int_{t-h}^h d\lambda_1 \int_{t-h}^h d\lambda_2 \int_{t-h}^h \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 - \int_{t-h}^h d\lambda_1 \int_{t-h}^h d\lambda_2 \int_h^t \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 - \\
& - \int_{t-h}^h d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_{t-h}^h \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 - \int_{t-h}^t d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_h^t \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 - \\
& - \int_h^t d\lambda_1 \int_{t-h}^h d\lambda_2 \int_{t-h}^h \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 - \int_h^t d\lambda_1 \int_h^t d\lambda_2 \int_h^t \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 -
\end{aligned}$$

$$-\int\limits_h^t d\lambda_1 \int\limits_{t-h}^h d\lambda_2 \int\limits_h^t \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 \equiv g_1(t, 0, 0).$$

В результате, в начальной точке $\mathbf{N}(h, 0, 0) \in \Delta_1$ условие разрешимости для уравнения (2.46) удовлетворяется, так как

$$g_1(h, 0, 0) = z(h, 0, 0) - \int\limits_0^h d\lambda_1 \int\limits_0^h d\lambda_2 \int\limits_0^h \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 \equiv 0. \quad (2.48)$$

В. Полагая, что функции $\overset{(i)}{z}(t, \nu, \mu)$ и $g_1(t, \nu, \mu)$ принадлежат классу $C_{\Delta_1}^{(3)}$ для $i = \overline{1, 6}$, решение (2.46) находится путем дифференцирования уравнения по t , ν и μ . Решение (2.46) в $\Omega_1^{(1)}(\mathbf{N}(t, \nu, \mu))$ вида $\varphi^{(1)}(\mathbf{M}_1)$, где $\mathbf{M}_1 \in \Omega_1^{(1)}(\mathbf{N}(t, \nu, \mu))$, задано формулой

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(\mathbf{M}_1) = & \mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} + \varphi^{(0)}(t - h, t - \nu, t - \mu) + \\ & + \varphi^{(0)}(t, t - \nu - h, t - \mu) - \varphi^{(0)}(t - h, t - \nu - h, t - \mu) + \\ & + \varphi^{(0)}(t, t - \nu, t - \mu - h) - \varphi^{(0)}(t - h, t - \nu, t - \mu - h) - \\ & - \varphi^{(0)}(t, t - \nu - h, t - \mu - h) + \varphi^{(0)}(t - h, t - \nu - h, t - \mu - h), \quad (2.49) \\ \mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} = & (\overset{(1)}{z})_{t\nu\mu}''' + (\overset{(1)}{z})_{\nu^2\mu}''' + (\overset{(1)}{z})_{\nu\mu^2}''' \end{aligned}$$

С. Получим условие непрерывности (2.49) на Δ_1 . Предположим, что точка $\mathbf{M}_1(p, q, r) \in \Omega_k^{(1)}(\mathbf{N}(t, \nu, \mu))$, для координат которой справедливо следующее: $t - \nu \leq q \leq r \leq p \leq t$, $t - \mu \leq q \leq r \leq p \leq t$, $\mu \leq \nu$. Пусть также существуют шесть точек, симметричных данной точке относительно плоскостей $p = q$, $q = r$ и $p = r$. Обозначим их как $\mathbf{M}_i \in \Omega_k^{(i)}(\mathbf{N})$ для $i = \overline{1, 6}$.

Теперь перепишем уравнение (2.49) в виде

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(\mathbf{M}_1) = & \mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} + \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu, t - \mu) + \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu - h, t - \mu) - \\ & - \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu - h, t - \mu) + \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu, t - \mu - h) - \\ & - \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu, t - \mu - h) - \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu - h, t - \mu - h) + \\ & + \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu - h, t - \mu - h), \quad (2.50) \end{aligned}$$

где $k = 1$. Следовательно, из (2.50) вытекает условие непрерывности стыковки $\varphi^{(0)}$ в точке $\mathbf{M}_1 \in \Omega_1^{(1)}(\mathbf{N}(t, \nu, \mu))$ для $h \leq t < 2h$, $\nu = \mu = t - h$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} |_{\mathbf{N}(t, \nu, \mu)} &= \varphi^{(k)}(t, t - \nu, t - \mu) - \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu, t - \mu) - \\
 &- \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu - h, t - \mu) + \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu - h, t - \mu) - \\
 &- \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu, t - \mu - h) + \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu, t - \mu - h) + \\
 &+ \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu - h, t - \mu - h) - \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu - h, t - \mu - h) = \\
 &= \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu, t - \mu) - \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu, t - \mu) - \\
 &- \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu - h, t - \mu) + \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu - h, t - \mu) - \\
 &- \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu, t - \mu - h) + \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu, t - \mu - h) + \\
 &+ \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu - h, t - \mu - h) - \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu - h, t - \mu - h).
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Отметим, что стыковка областей $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1, 6}$, реализуется специальным образом (Рисунок 2.1).

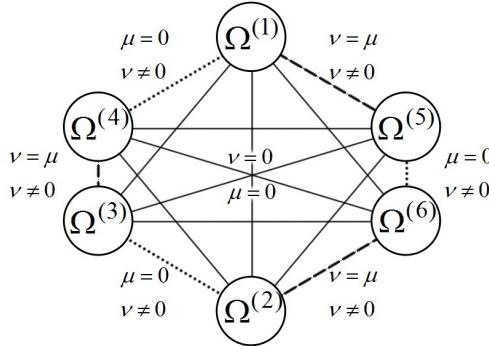


Рисунок 2.1 – Специфика соотношения областей $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1, 6}$

На Рисунке 2.1 области, которые пересекаются при $\nu = \mu = 0$, соединены сплошной линией, при $\mu = 0$ и $\nu \neq 0$ – пунктирной линией, а при $\nu = \mu \neq 0$ – штриховой.

В результате условие (2.51) выполняется для областей $\Omega_1^{(1)} \cap \Omega_1^{(5)}$, что равносильно $h < t < 2h$, $0 \leq \mu = \nu \leq t - h$, для $\Omega_1^{(1)} \cap \Omega_1^{(4)}$, что равносильно $h < t < 2h$, $\nu = t - h$, $\mu = 0$, а также для пересечения всех областей $\Omega_1^{(i)}$, $i = \overline{1, 6}$, т.е. $t = h$, $\mu = \nu = 0$.

Если функция $\varphi^{(0)}(t, t - \nu, t - \mu)$ непрерывна в области Ω_0 (где Ω_0 – область, соответствующая предыстории), то благодаря условию (2.51), функция

$\varphi^{(1)}(t, t - \nu, t - \mu)$ будет непрерывна в области $\Omega_1^{(1)}$. Подобное рассуждение также применимо к функции $\varphi^{(1)}$ из областей $\Omega_1^{(i)}$, где $i = \overline{2, 6}$.

Шаг 2. Ограничимся на данном шаге подробным рассмотрением пунктов **A** и **C** алгоритма.

A. Рассмотрим область Δ_2 . Пусть $\mathbf{N}(t, 0, 0) \in \Delta_2$. Проведя аналогичные рассуждения, как в предыдущем случае, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{2h}^t d\lambda_1 \int_{2h}^t d\lambda_2 \int_{2h}^t \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 = z(t, 0, 0) - \\
 & - \int_{t-h}^{2h} d\lambda_1 \int_{t-h}^{2h} d\lambda_2 \int_{t-h}^{2h} \varphi^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 - \int_{t-h}^{2h} d\lambda_1 \int_{t-h}^{2h} d\lambda_2 \int_{2h}^t \varphi^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 - \\
 & - \int_{t-h}^{2h} d\lambda_1 \int_{2h}^t d\lambda_2 \int_{t-h}^{2h} \varphi^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 - \int_{t-h}^t d\lambda_1 \int_{2h}^t d\lambda_2 \int_{2h}^t \varphi^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 - \\
 & - \int_{2h}^t d\lambda_1 \int_{t-h}^{2h} d\lambda_2 \int_{t-h}^{2h} \varphi^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 - \int_{2h}^t d\lambda_1 \int_{2h}^t d\lambda_2 \int_{t-h}^{2h} \varphi^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 - \\
 & - \int_{2h}^t d\lambda_1 \int_{t-h}^{2h} d\lambda_2 \int_{2h}^t \varphi^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 \equiv g_2(t, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Условие разрешимости $g_2(2h, 0, 0) = 0$ заведомо выполняется, так как

$$g_2(2h, 0, 0) = z(2h, 0, 0) - \int_h^{2h} d\lambda_1 \int_h^{2h} d\lambda_2 \int_h^{2h} \varphi^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 \equiv 0. \quad (2.52)$$

C. Предварительно отметим, что в силу специфики стыковки областей (см. Рисунок 2.1) дополнительно возникают условия, аналогичные (2.51). В частности, для точки \mathbf{N} с координатами $(2h, h, h)$ подобное условие представимо в виде

$$\begin{aligned}
 g_{2_1}(2h, h, h) &= \overset{(j)}{z}(2h, h, h) - \int_h^{2h} d\lambda_1 \int_0^h d\lambda_2 \int_0^h \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 \equiv 0, \quad j = 1, 5, \\
 \overset{(1)}{z}(2h, h, h) &= \overset{(5)}{z}(2h, h, h),
 \end{aligned} \quad (2.53)$$

а в точке $\mathbf{N}(2h, h, 0)$ условие стыковки представляется как

$$g_{2_2}(2h, h, 0) = \overset{(j)}{z}(2h, h, 0) - \int\limits_h^{2h} d\lambda_1 \int\limits_0^h d\lambda_2 \int\limits_h^{2h} \varphi^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 \equiv 0, \quad j = 1, 4,$$

$$\overset{(1)}{z}(2h, h, 0) = \overset{(4)}{z}(2h, h, 0). \quad (2.54)$$

Окончательно, принимая во внимание предположение о том, что $\overset{(i)}{z}(t, \nu, \mu)$, $g_2(t, \nu, \mu)$, $g_{2_1}(t, \nu, \mu)$, $g_{2_2}(t, \nu, \mu) \in C_{\Delta_2}^{(3)}$ для $i = \overline{1, 6}$, решение уравнения (2.46) примет вид (2.50) при $k = 2$. Убедимся далее, что условия (2.51) при $k = 2$ обеспечивают непрерывность функций $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(2)}$ при $2h \leq t < 3h$, $t - h \leq \nu < t$, $\mu = t - h$, а также функций $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ при $t = 2h$, $t - 2h \leq \mu \leq \nu \leq t - h$.

Действительно, в первом случае из (2.51) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z}|_{\mathbf{N}(t, \nu, \mu)} &= \varphi^{(2)}(t, t - \nu, h) - \varphi^{(1)}(t - h, t - \nu, h) - \varphi^{(1)}(t, t - \nu - h, h) + \\ &+ \varphi^{(1)}(t - h, t - \nu - h, h) - \varphi^{(1)}(t, t - \nu, 0) + \varphi^{(1)}(t - h, t - \nu, 0) + \varphi^{(1)}(t, t - \nu - h, 0) - \\ &- \varphi^{(1)}(t - h, t - \nu - h, 0) = \varphi^{(2)}(t, t - \nu, h) - \varphi^{(0)}(t - h, t - \nu, h) - \varphi^{(0)}(t, t - \nu - h, h) + \\ &+ \varphi^{(0)}(t - h, t - \nu - h, h) - \varphi^{(0)}(t, t - \nu, 0) + \varphi^{(0)}(t - h, t - \nu, 0) + \\ &+ \varphi^{(0)}(t, t - \nu - h, 0) - \varphi^{(0)}(t - h, t - \nu - h, 0), \end{aligned}$$

так что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi^{(0)}(t, t - \nu, h - \varepsilon) = \varphi^{(2)}(t, t - \nu, h)$. Во втором случае

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z}|_{\mathbf{N}(t, \nu, \mu)} &= \varphi^{(2)}(2h, 2h - \nu, 2h - \mu) - \varphi^{(1)}(h, 2h - \nu, 2h - \mu) - \\ &- \varphi^{(1)}(2h, h - \nu, 2h - \mu) + \varphi^{(1)}(h, h - \nu, 2h - \mu) - \varphi^{(1)}(2h, 2h - \nu, h - \mu) + \\ &+ \varphi^{(1)}(h, 2h - \nu, h - \mu) + \varphi^{(1)}(2h, h - \nu, h - \mu) - \varphi^{(1)}(h, h - \nu, h - \mu) = \\ &= \varphi^{(1)}(2h, 2h - \nu, 2h - \mu) - \varphi^{(1)}(h, 2h - \nu, 2h - \mu) - \varphi^{(1)}(2h, h - \nu, 2h - \mu) + \\ &+ \varphi^{(1)}(h, h - \nu, 2h - \mu) - \varphi^{(1)}(2h, 2h - \nu, h - \mu) + \varphi^{(1)}(h, 2h - \nu, h - \mu) + \\ &+ \varphi^{(1)}(2h, h - \nu, h - \mu) - \varphi^{(1)}(h, h - \nu, h - \mu), \end{aligned}$$

так что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi^{(1)}(2h - \varepsilon, 2h - \nu, 2h - \mu) = \varphi^{(2)}(2h, 2h - \nu, 2h - \mu)$.

Функция $\varphi^{(2)}$ из области $\Omega_2^{(1)}$ имеет общую границу с функциями $\varphi^{(2)}$ из областей $\Omega_2^{(4)}$ и $\Omega_2^{(5)}$. Выполнение равенства правых частей уравнения

(2.46): $\overset{(1)}{z}(2h, h, 0) = \overset{(4)}{z}(2h, h, 0)$ и $\overset{(1)}{z}(2h, h, h) = \overset{(5)}{z}(2h, h, h)$ обеспечивает непрерывность стыковки решения (см. Рисунок 2.1).

Шаг $N+1$. Решение уравнения (2.46), (2.47) находится путем последовательного увеличения значения индекса k до значения $N+1$. Для краткости рассмотрим только пункт **В** алгоритма и подобласть $\Omega^{(1)}$. Следовательно, решение уравнения $V_{3(1)}\varphi = \overset{(1)}{z}$ из (2.46) можно определить с помощью формулы обращения (в терминологии [131])

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(t, t - \nu, t - \mu) = & \sum_{k=1}^{N+1} \mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} |_{\Delta_k} + \sum_{k=1}^{N+1} (\varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu, t - \mu) + \\ & + \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu - h, t - \mu) - \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu - h, t - \mu) + \\ & + \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu, t - \mu - h) - \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu, t - \mu - h) - \\ & - \varphi^{(k-1)}(t, t - \nu - h, t - \mu - h) + \varphi^{(k-1)}(t - h, t - \nu - h, t - \mu - h)). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Решение (2.46), (2.47) в остальных подобластих $\Omega^{(i)} \in \Omega$, $i = \overline{2, 6}$, будет иметь аналогичный вид.

Замечание. Следует отметить, что проверка условий типа (2.48), (2.52) необходима для обеспечения взаимной обратимости операторов интегрирования $V_{3(i)}$, $i = \overline{1, 6}$, и дифференцирования \mathcal{D}_3 при их последовательном применении. Подобная проверка важна, как в классическом случае (см., например [17]), так и в рассматриваемом контексте.

Выделим условия, гарантирующие непрерывность $\bar{\varphi}$ внутри каждой из подобластей $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1, 6}$, с помощью условия (2.52) при $k = \overline{1, N+1}$. Рассмотрим для простоты случай подобласти $\Omega^{(1)}$ и сформулируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^{N+1} \varphi^{(i)}$ – решение (2.46) на $\Omega^{(1)}$ с предысторией $\varphi^{(0)}$ (2.47), непрерывной на $\Omega_0(\mathbf{N})$, $\mathbf{N} \in \Delta_0$, и пусть функция $\overset{(1)}{z}$ удовлетворяет условиям

$$\mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} |_{\mathbf{N}(t, \nu, \mu)} \in C_{\Omega^{(1)}},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3 \overset{(1)}{z} |_{\mathbf{N}(t, \nu, t-h)} = & \varphi^{(0)}(t, t - \nu, h) - \varphi^{(0)}(t - h, t - \nu, h) - \varphi^{(0)}(t, t - \nu - h, h) + \\ & + \varphi^{(0)}(t - h, t - \nu - h, h) - \varphi^{(0)}(t, t - \nu, 0) + \varphi^{(0)}(t - h, t - \nu, 0) + \end{aligned}$$

$$+\varphi^{(0)}(t, t - \nu - h, 0) - \varphi^{(0)}(t - h, t - \nu - h, 0).$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi^{(0)}(t, t - \nu, h - \varepsilon) = \varphi^{(i)}(t, t - \nu, h), \quad i = \overline{1, N+1}, \quad \mathbf{N}(t, \nu, t - h) \in \Delta_1,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi^{(i-1)}(t, t - \nu - \varepsilon, t - \mu - \varepsilon) = \varphi^{(i)}(t, t - \nu, t - \mu), \quad i = \overline{2, N+1}, \quad \mathbf{N}(t, \nu, \mu) \in \Delta_i.$$

Сформулированная автором теорема 5 развивает результат публикации [163] с двумерного на трехмерный случай. Доказательство теоремы 5 следует из геометрических соображений, т.е. осуществляется проверка условия согласования на границах подобластей (см. Рисунок 2.1), внутри самих подобластей и на границе с предысторией.

Отметим, что вышеупомянутые теоретические результаты были получены для последующего применения в работе с ядром $K(s_1, s_2, s_3)$, включая выбор численного метода для поиска приближенного решения уравнения (2.46).

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Проиллюстрируем специфику полученных формул. Пусть $h = 1$, так что из (2.46) имеем

$$\overset{(1)}{z}(t, \nu, \mu) = -t^4 + \nu^2 - \mu - \frac{1}{4}t\nu + \nu\mu + 2, \quad \overset{(3)}{z}(t, \nu, \mu) = -t^4 + \nu^2 - \frac{5}{4}\mu + 2, \quad (2.56)$$

$$\overset{(2)}{z}(t, \nu, \mu) = -t^4 - \nu^3 - \frac{3}{7}t\nu + \nu^2\mu + 2, \quad \overset{(4)}{z}(t, \nu, \mu) = -t^4 - \nu^2 - \mu + 2, \quad (2.57)$$

$$\overset{(5)}{z}(t, \nu, \mu) = -t^4 + t\mu + \nu\mu + 2, \quad \overset{(6)}{z}(t, \nu, \mu) = -t^4 + \mu - \frac{1}{4}t^2\nu + 2, \quad (2.58)$$

где $t \in [0, 3]$, $\mu \leq \nu \leq t - 1$ и

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(s_1, s_2, s_3) &= -\frac{1}{3}s_1 + s_2 + \frac{4}{3}s_3; & \varphi^{(0)}(s_2, s_1, s_3) &= -\frac{1}{3}s_2 + s_1 + \frac{4}{3}s_3; \\ \varphi^{(0)}(s_2, s_3, s_1) &= -\frac{1}{3}s_2 + s_3 + \frac{4}{3}s_1; & \varphi^{(0)}(s_3, s_2, s_1) &= -\frac{1}{3}s_3 + s_2 + \frac{4}{3}s_1; \\ \varphi^{(0)}(s_1, s_3, s_2) &= -\frac{1}{3}s_1 + s_3 + \frac{4}{3}s_2; & \varphi^{(0)}(s_3, s_1, s_2) &= -\frac{1}{3}s_3 + s_1 + \frac{4}{3}s_2, \\ s_1, s_3 &\in [0, 3], \quad s_2 \in [0, 1], \quad s_2 \leq s_3 \leq s_1. & & (2.59) \end{aligned}$$

Убедимся в выполнении условия разрешимости (2.48), что область Ω представима в виде куба, рассмотрим равенство

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} \varphi(s_1, s_2, s_3) \prod_{i=1}^3 ds_i = \iiint_{\Omega} \varphi(s_1, s_3, s_2) \prod_{i=1}^3 ds_i = \\
& = \iiint_{\Omega} \varphi(s_2, s_1, s_3) \prod_{i=1}^3 ds_i = \iiint_{\Omega} \varphi(s_2, s_3, s_1) \prod_{i=1}^3 ds_i = \\
& = \iiint_{\Omega} \varphi(s_3, s_2, s_1) \prod_{i=1}^3 ds_i = \iiint_{\Omega} \varphi(s_3, s_1, s_2) \prod_{i=1}^3 ds_i = \\
& = \frac{1}{6} \iiint_{\Omega} (\varphi(s_1, s_2, s_3) + \varphi(s_1, s_3, s_2) + \varphi(s_2, s_1, s_3) + \\
& + \varphi(s_2, s_3, s_1) + \varphi(s_3, s_2, s_1) + \varphi(s_3, s_1, s_2)) \prod_{i=1}^3 ds_i.
\end{aligned}$$

Учитывая (2.56)–(2.59) и полагая, что мы находимся в Δ_1 , имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \left(-\frac{1}{3}s_1 + s_2 + \frac{4}{3}s_3 \right) \prod_{i=1}^3 ds_i = \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \left(-\frac{1}{3}s_2 + s_1 + \frac{4}{3}s_3 \right) \prod_{i=1}^3 ds_i \\
& = \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \left(-\frac{1}{3}s_2 + s_3 + \frac{4}{3}s_1 \right) \prod_{i=1}^3 ds_i = \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \left(-\frac{1}{3}s_3 + s_2 + \frac{4}{3}s_1 \right) \prod_{i=1}^3 ds_i \\
& = \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \left(-\frac{1}{3}s_1 + s_3 + \frac{4}{3}s_2 \right) \prod_{i=1}^3 ds_i = \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \left(-\frac{1}{3}s_3 + s_1 + \frac{4}{3}s_2 \right) \prod_{i=1}^3 ds_i \\
& V_{3(j)}\varphi = \frac{2}{3} \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t \int_{t-1}^t (s_1 + s_2 + s_3) \prod_{i=1}^3 ds_i, \quad j = \overline{1, 6}.
\end{aligned}$$

Найдем значения $z(t, 0, 0) = z^{(i)}(t, 0, 0)$, $i = \overline{1, 6}$, из (2.56)–(2.58) при $\nu = \mu = 0$, так что

$$z(t, 0, 0) = -t^4 + 2.$$

Для проверки (2.48) при $t \in [1, 2)$ вычислим

$$z(1, 0, 0) = 1 - \frac{2}{3} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \int_0^1 (s_1 + s_2 + s_3) ds_3 = 1 - 1 \equiv 0.$$

Таким образом, согласно (2.49), для $\mathbf{N}(t, \nu, \mu) \in \Delta_1 = \{t, \nu, \mu : \mu \leq \nu \leq t - 1, 1 \leq t < 2\}$ получим

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(\mathbf{M}_1) &= -\frac{1}{3}s_1 + s_2 + \frac{4}{3}s_3, \quad \varphi^{(1)}(\mathbf{M}_2) = -\frac{1}{3}s_2 + s_1 + \frac{4}{3}s_3, \\ \varphi^{(1)}(\mathbf{M}_3) &= \frac{1}{3}s_2 + s_3 + \frac{4}{3}s_1, \quad \varphi^{(1)}(\mathbf{M}_4) = -\frac{1}{3}s_3 + s_2 + \frac{4}{3}s_1, \\ \varphi^{(1)}(\mathbf{M}_5) &= -\frac{1}{3}s_1 + s_3 + \frac{4}{3}s_2, \quad \varphi^{(1)}(\mathbf{M}_6) = -\frac{1}{3}s_3 + s_1 + \frac{4}{3}s_2,\end{aligned}$$

где $\mathbf{M}_i(p, q, r) \in \Omega_1^{(i)}(\mathbf{N}(t, \nu, \mu))$, $i = \overline{1, 6}$, $s_1 = t$, $s_2 = t - \nu$, $s_3 = t - \mu$. Получено, что условие согласования (2.51) выполняется, следовательно функция $\varphi^{(1)}$ непрерывна в $\Omega_1^{(i)}(\mathbf{N}(t, \nu, \mu))$, $i = \overline{1, 6}$.

Пусть теперь $\mathbf{N}(t, \nu, \mu) \in \Delta_2 = \{t, \nu, \mu : \mu \leq \nu \leq t - 1, 2 \leq t < 3\}$.

Тогда

$$z(2, 0, 0) = -14 \neq \frac{2}{3} \int\limits_1^2 ds_1 \int\limits_1^2 ds_2 \int\limits_1^2 (s_1 + s_2 + s_3) ds_3 = 3.$$

В силу нарушения условия (2.53) задача (2.56)–(2.59) неразрешима в классе непрерывных функций, ограниченных областями $\Omega_2^{(i)}(\mathbf{N}(t, \nu, \mu))$, $i = \overline{1, 6}$.

2.2. Задача идентификации векторного входного сигнала в квадратичном и кубическом полиномах Вольтерра

В данном разделе рассматривается задача идентификации входного сигнала для систем, описываемых интегральными уравнениями Вольтерра I рода. Основное внимание уделяется случаям, когда отклики системы содержат погрешности измерений, что требует применения специальных методов фильтрации.

В первой части раздела представлен подход к восстановлению сигнала на основе сглаживающих кубических сплайнов (СКС), позволяющих минимизировать влияние шумов. Описан алгоритм выбора оптимального параметра сглаживания с использованием L -кривой, а также построена численная схема для вычисления входного сигнала в дискретном случае.

Далее исследуются системы с квадратичной и кубической нелинейностями, где решение сводится к алгебраическим уравнениям высших порядков. Для таких систем предложен метод, основанный на замене переменных и

аналитическом решении с применением формулы Кардано. Доказаны теоремы о единственности решения и условиях его существования, связывающих свойства ядер системы с заданными откликами.

2.2.1. Идентификация входного сигнала на исходных данных, отягощенных погрешностями

В данном пункте рассмотрим задачу идентификации входного сигнала системы (1.39) при $r = 2$, $N = 1$, $n = 1$, но с условием, что отклики системы $y_r(t)$ будут отягощены погрешностями. Во избежание сильных отклонений от точного значения будем применять фильтр, основанный на СКС. Для этого сначала рассмотрим некоторые определения, касающиеся СКС [51].

Пусть на некотором отрезке $[T_1, T_2]$, заданы n узлов так, что $T_1 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T_2$, и в них заданы значения функции $f(t)$:

$$\tilde{f}_i = f(t_i) + \eta_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.60)$$

где η_i – случайный шум измерений, который характеризуется нулевым средним значением. Согласно [51] функцию $S_n(t)$ будем называть кубическим сплайном дефекта единица ($\nu = 1$), если выполняются следующие условия:

а) функция $S_n(t)$ является кубическим полиномом вида:

$$S_n(t) = a_i + b_i(t - t_i) + c_i(t - t_i)^2 + d_i(t - t_i)^3 \quad (2.61)$$

на каждом отрезке $[t_i; t_{i+1}]$;

б) функция $S_n(t)$ характеризуется непрерывными первой и второй производной на отрезке $[T_1, T_2]$.

Интерполяционный сплайн строится через точки (t_i, \tilde{f}_i) . СКС (t_i, \tilde{f}_i) строится в окрестности этих точек, величина отклонения которого определяется значением параметра сглаживания α^* . Это обеспечивает сглаживание (фильтрацию) шумов измерений. На практике наиболее распространены два вида краевых условий:

- условия на значения первой производной

$$S'_{n, \alpha^*}(t_1) = s'_1, \quad S'_{n, \alpha^*}(t_n) = s'_n; \quad (2.62)$$

- условия на значения второй производной, равные нулю (естественные краевые условия)

$$S''_{n,\alpha^*}(t_1) = 0, \quad S''_{n,\alpha^*}(t_n) = 0. \quad (2.63)$$

Зная, что СКС обеспечивает минимум функционалу

$$F_{\alpha^*}(S) = \alpha^* \int_{t_1}^{t_n} |S''_{n,\alpha^*}(t)|^2 dt + \sum_{i=1}^n p_i^{-1} (\tilde{f}_i - S_{n,\alpha^*}(t_i))^2, \quad (2.64)$$

где p_i – весовые множители i -го измерения \tilde{f}_i (в случае равноточных измерений задаются одинаковыми, например, $p_i \equiv 1$), можно его построить.

Далее необходимо определить значение параметра сглаживания. Для его определения применяют различные методы, например, метод перекрестной проверки [169]). В данном исследовании будем применять метод L -кривой, описанный в работе [171]. Суть этого метода заключается в выполнении следующих этапов:

1) выписывание функционалов из (2.64):

$$\rho(\alpha^*) = \alpha^* \int_{t_1}^{t_n} |S''_{n,\alpha^*}(t)|^2 dt, \quad \gamma(\alpha^*) = \sum_{i=1}^n p_i^{-1} (\tilde{f}_i - S_{n,\alpha^*}(t_i))^2;$$

2) построение параметрической кривой с координатами $(\rho(\alpha^*), \gamma(\alpha^*))$;

3) выбор точки с координатами из условия максимальной кривизны полученной кривой;

4) вычисление параметра α^* в этой точке, который, в свою очередь, будет являться оптимальным.

Далее, зная описание фильтра, перейдем к построению численной схемы для вычисления входного сигнала системы (1.39) при заданных ранее условиях. Для этого введем равномерную сетку: $t_i = ih$, $t_{j-\frac{1}{2}} = (j - 1/2)h$, $h = T/n$. В результате из (1.39) получим

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^i K_{i,j-\frac{1}{2}}^{(1)} x_{j-\frac{1}{2}}^{(1)} = y_i^{(1)}, \\ \sum_{j=1}^i K_{i,j-\frac{1}{2}}^{(1)} x_{j-\frac{1}{2}}^{(1)} + \sum_{j=1}^i K_{i,j-\frac{1}{2}}^{(2)} x_{j-\frac{1}{2}}^{(2)} = y_i^{(2)}, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2.65)$$

где $x^{(l)}(t_{j-\frac{1}{2}}) = x_{j-\frac{1}{2}}^{(l)}$, $y^{(l)}(t_i) = y_i^{(l)}$, $K^{(l)}(t_i, t_{j-\frac{1}{2}}) = K_{i,j-\frac{1}{2}}^{(l)}$, $l = 1, 2$. Таким образом, решение (2.65) имеет вид

$$\begin{cases} x_{i-\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{y_i^{(1)} - y_{i-1}^{(1)}}{K_{i,i-\frac{1}{2}}^{(1)}}, \\ x_{i-\frac{1}{2}}^{(2)} = \frac{y_i^{(2)} - y_i^{(1)} - y_{i-1}^{(2)} + y_{i-1}^{(1)}}{K_{i,i-\frac{1}{2}}^{(2)}}, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.66)$$

Имея численную схему (2.66) и описанный выше фильтр, можно переходить к вычислительному эксперименту, который будет описан в пункте 2.3.3.

2.2.2. Восстановление входного сигнала нелинейной системы интегральных уравнений

В предыдущем пункте была рассмотрена задача идентификации входного сигнала системы (1.39) при $r = 2$, $N = 1$, $n = 1$ с учетом погрешностей в откликах системы и применением фильтра, основанного на СКС. Теперь, основываясь на полученных результатах, перейдем к задаче идентификации входного возмущения $x(t)$, обеспечивающего желаемый отклик $y(t)$ в системе (1.39).

Ранее в работе [131] рассматривалась система (1.39) при $N = 1, 2, 3$ и $p = 1$. Здесь же предлагается рассмотреть систему (1.39) в условиях, когда $N = 1, 2$ и $N = 2, 3$ при $p = 2$.

Рассмотрим случай [104], когда $r = 2$, где $y_1(t)$ соответствует полином степени $N = 1$, $y_2(t)$ – полином степени $N = 2$ при векторных входном сигнале $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ и выходном сигнале $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$, причем $y_i(0) = 0$, $y_i(t) \in C_{[0,T]}^{(1)}$, $i = 1, 2$. Пусть вместо (1.39) задана система интегральных уравнений второго порядка

$$y_i(t) = \int_0^t K_i(s)x(s)ds + Z[x], \quad (2.67)$$

а оператор $Z[x]$ определен по правилу

$$Z[x] = \int_0^t \int_0^t \left[\sum_{i=1}^2 L_i(t, s_1, s_2)x_i(s_1)x_i(s_2) + L_{12}(t, s_1, s_2)x_1(s_1)x_2(s_2) \right] ds_1 ds_2, \quad (2.68)$$

где $L_i(t, s_1, s_2) = (0, K_{ii}(t))^T$, $L_{12}(t, s_1, s_2) = (0, K_{12}(t))^T$, $i = 1, 2$, ядра Вольтерра $K_i(t) = (K_i^{(1)}(t), K_i^{(2)}(t))$, $K_{ji}(t)$ непрерывны и непрерывно-дифференцируемы по t , причем $K_i(t) \neq 0$, $K_{ji}(t) \neq 0$, $1 \leq j \leq i \leq 2$.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $y_i(t) \in C_{[0, T]}^{(1)}$, $y_i(0) = 0$, $i = 1, 2$. Тогда единственное непрерывное решение (2.67), (2.68) определяется формулой*

$$\bar{x}_i(t) = \frac{\eta'_i(t) - b'_i(t)}{2a_i(t)} - a'_i(t) \frac{(\eta_i(t) - b_i(t))}{2(a_i(t))^2}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (2.69)$$

где

$$a_i(t) = K_{jj}(t) + \gamma_i(t)(K_{ii}(t)\gamma_i(t) - K_{12}(t)), \quad (2.70)$$

$$\gamma_i(t) = \frac{K_j^{(1)}(t)}{K_i^{(1)}(t)}, \quad \beta_i(t) = \frac{y_1(t)}{K_i^{(1)}}, \quad (2.71)$$

$$b_i(t) = K_j^{(2)}(t) - \gamma_i(t)(K_i^{(2)}(t) + 2K_{ii}(t)\beta_i(t)) + K_{12}(t)\beta_i(t), \quad (2.72)$$

$$c_i(t) = \beta_i(t)(K_i^{(2)}(t) + K_{ii}(t)\beta_i(t)) - y_2(t), \quad \eta_i(t) = \sqrt{b_i(t)^2 - 4a_i(t)c_i(t)}. \quad (2.73)$$

Условия теоремы 6 включают в себя, во-первых, стандартное условие на гладкость исходных данных и, во-вторых, условие корректного задания $y(0)$.

Доказательство. Убедимся, что подстановка (2.69) в (2.67) обращает его в тождество. Имеем:

$$I_j = \int_0^t \bar{x}_j(s) ds = \int_0^t \left(\frac{\eta'_i(s) - b'_i(s)}{2a_i(s)} - a'_i(s) \frac{(\eta_i(s) - b_i(s))}{2(a_i(s))^2} \right) ds = \frac{\eta_i(t) - b_i(t)}{2a_i(t)}. \quad (2.74)$$

Отсюда из (2.67) с учетом (2.74) имеем

$$y_1 = K_1^{(1)} I_1 + K_2^{(1)} I_2, \quad (2.75)$$

$$y_2 = K_1^{(2)} I_1 + K_2^{(2)} I_2 + K_{11} I_1^2 + K_{22} I_2^2 + K_{12} \cdot I_1 \cdot I_2. \quad (2.76)$$

Далее выразим I_1 из (2.75) и подставим его в (2.76), чтобы получилось квадратное уравнение относительно I_2 (для краткости записи параметр t был опущен):

$$I_1 = \frac{y_1}{K_1^{(1)}} + \frac{K_2^{(1)}}{K_1^{(1)}} I_2 = \beta_1 + \gamma_1 I_2,$$

$$I_2^2 (K_{22} + K_{11}\gamma_1^2 - K_{12}\gamma_1) + I_2 (K_2^{(2)} - K_1^{(2)}\gamma_1 - 2K_{11}\gamma_1\beta_1 + K_{12}\beta_1) +$$

$$+K_1^{(2)}\beta_1 + K_{11}\beta_1^2 - y_2 = 0,$$

или

$$a_1 I_2^2 + b_1 I_2 + c_1 = 0. \quad (2.77)$$

Подставим I_2 из (2.74) в (2.77) и получим

$$\begin{aligned} a_1 \left(\frac{\eta_1 - b_1}{2a_1} \right)^2 + b_1 \frac{\eta_1 - b_1}{2a_1} + c_1 &= \\ = \frac{\eta_1^2 - 2\eta_1 b_1 + b_1^2 + 2b_1(\eta_1 - b_1)}{4a_1} + c_1 &= \\ = \frac{\eta_1^2 - b_1^2}{4a_1} + c_1 &= \frac{b_1^2 - 4a_1 c_1 - b_1^2 + 4a_1 c_1}{4a_1} \equiv 0. \end{aligned}$$

Теперь докажем, что I_2 единственно для (2.77). Для этого предположим, что найдется такое \tilde{I}_2 , для которого выполняется

$$a_1 \tilde{I}_2^2 + b_1 \tilde{I}_2 + c_1 = 0. \quad (2.78)$$

Далее вычтем из (2.77) равенство (2.2.2) и получим

$$a_1(I_2^2 - \tilde{I}_2^2) + b_1(I_2 - \tilde{I}_2) = 0,$$

вынося общий множитель, имеем

$$(I_2 - \tilde{I}_2)(a_1(I_2 + \tilde{I}_2) + b_1) = 0.$$

При этом отметим, что решение, которое могло бы соответствовать равенству $a_1(I_2 + \tilde{I}_2) + b_1 = 0$, не удовлетворяет условию $y(0) = 0$, поэтому $a_1(I_2 + \tilde{I}_2) + b_1 \neq 0$. Тогда должно выполняться $I_2 - \tilde{I}_2 = 0$, из чего следует $I_2 = \tilde{I}_2$. Таким образом, решение I_2 единственно. Доказательство относительно I_1 осуществляется аналогично. ■

Заметим, что условие $y(0) = 0$ обеспечивает отсутствие решения в классе обобщенных функций в линейном случае, т.е. для (2.67) при $Z[x] = 0$. Следующая теорема показывает, что для системы (2.67), (2.68) это заведомо не выполняется.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть, с учетом введенных обозначений $a_i(t)$, $b_i(t)$, имеет место $R_i(t) = \frac{b_i(t)}{a_i(t)}$, $i = 1, 2$. Если $\bar{x}_i(t)$ – решение (2.67), (2.68), то*

$$\bar{x}_i(t) = -(\bar{x}_i(t) + R_i(t)\delta(t) + \hat{R}_i(t)), \quad j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (2.79)$$

также решение (2.67), (2.68), где $\delta(t)$ – δ -функция Дирака.

Доказательство теоремы 7 базируется на результатах работы [103], т.е. алгоритм доказательства основан на подстановке (2.79) в (2.68) и дальнейшем обращении его в тождество.

Далее рассмотрим систему (1.39) при $r = 2$, где $y_1(t)$ соответствует полином степени $N = 2$, $y_2(t)$ – полином степени $N = 3$ при векторном входном сигнале $x(t) = (x_1, x_2)^T$. Также положим, что функции $K_{i_1 \dots i_l}^{(r)}(t, s_1, \dots, s_l) = K_{i_1 \dots i_l}^{(r)}(t)$, $r = 1, 2$, $i_l = 1, 2$:

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^2 \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq 2} \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1 \dots i_l}^{(1)}(t) \prod_{k=1}^2 x_{i_l}(s_k) ds_k = y_1(t), \\ \sum_{l=1}^3 \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq 2} \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1 \dots i_l}^{(2)}(t) \prod_{k=1}^3 x_{i_l}(s_k) ds_k = y_2(t). \end{cases} \quad (2.80)$$

Здесь $0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq t \leq T$, $K_{ii}^{(1)}(0) \neq 0$, $(K_{i_1 \dots i_l}^{(r)}(t))' \in C_{[0, T]}$. Решение (2.80) осуществляется путем введения замен

$$\int_0^t x_1(s) ds = z_1, \quad \int_0^t x_2(s) ds = z_2$$

и сведения к системе следующих уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^2 \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq 2} K_{i_1 \dots i_l}^{(1)}(t) \prod_{k=1}^2 z_{i_l}(t) = y_1(t), \\ \sum_{l=1}^3 \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq 2} K_{i_1 \dots i_l}^{(2)}(t) \prod_{k=1}^3 z_{i_l}(t) = y_2(t). \end{cases} \quad (2.81)$$

Пусть справедливы условия $y_r(0) = 0$, $y_r'(t) \in C_{[0, T]}$ и

$$(a_{ii}^2 - 4f_i)(b_{ii} - 4b_{ij}) - (a_{ii}b_{ii} - 2a_{ij})^2 = 0.$$

Тогда в результате использования формулы Кардано получим решение (2.81):

$$1) \quad z_j = \gamma_i + \beta_i - \frac{v_i}{3u_i}, \text{ если } Q_i > 0;$$

$$2) \quad z_j = 2\gamma_i - \frac{v_i}{3u_i}, \text{ либо если } Q_i = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 Q_i &= \left(\frac{p_i}{2}\right)^3 + \left(\frac{q_i}{2}\right)^2, \quad \gamma_i = \left(-\frac{q_i}{2} + \sqrt{Q_1}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \beta_i = \left(-\frac{q_i}{2} - \sqrt{Q_1}\right)^{\frac{1}{3}}, \\
 p_i &= \frac{m_i}{u_i} - \frac{v_i^2}{3u_i^2}, \quad q_i = \frac{4v_i^3}{27u_i^3} - \frac{v_i m_i}{3u_i^2} + \frac{n_i}{u_i}, \\
 u_i &= K_{iii}^{(2)} c_i^3 + K_{1i2}^{(2)} c_i^2 + K_{1j2}^{(2)} c_i + K_{jjj}^{(2)}, \\
 v_i &= K_{ii}^{(2)} c_i^2 + K_{12}^{(2)} c_i + K_{jj}^{(2)} + 3c_i^2 d_i K_{iii}^{(2)} + 2c_i d_i K_{1i2}^{(2)} + K_{1j2}^{(2)} d_i, \\
 m_i &= K_i^{(2)} c_i + K_j^{(2)} + 2K_{ii}^{(2)} c_i d_i + K_{12}^{(2)} d_i + 3K_{iii}^{(2)} c_i d_i^2 + K_{1i2}^{(2)} d_i^2, \\
 n_i &= K_i^{(2)} d_i + K_{ii}^{(2)} d_i^2 + K_{iii}^{(2)} d_i^3 - y_2, \quad c_i = \frac{1 - b_{ii}}{2}, \\
 d_i &= \frac{1}{2} \left(-a_{ii} \frac{-a_{ii} b_{ii} - 2a_{ij}}{b_{ii} - 4b_{ij}} \right), \quad a_{ii} = \frac{K_i^{(1)}}{K_{ii}^{(1)}}, \quad b_{ii} = \frac{K_{12}^{(1)}}{K_{ii}^{(1)}}, \\
 a_{ij} &= \frac{K_j^{(1)}}{K_{ii}^{(1)}}, \quad b_{ij} = \frac{K_{jj}^{(1)}}{K_{ii}^{(1)}}, \quad f_i = \frac{y_1}{K_{ii}^{(1)}}, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получено решение системы (2.81), содержащей полиномиальные уравнения второго и третьего порядка.

2.3. Верификация и анализ результатов численных экспериментов

В данном пункте рассматриваются вычислительные эксперименты, подтверждающие достоверность результатов, полученных в пунктах 2.1 и 2.2.

2.3.1. Численные эксперименты на основе сигналов из класса кусочно-линейных функций

Рассмотрим тестовый пример, который позволит проиллюстрировать эффективность применяемых методов из пункта 2.1 в вычислениях.

Пример 1. Пусть функция $\bar{K}(t, s)$ задана следующим образом:

$$\bar{K}(t, s) = t^2 s + s^3.$$

В этом случае при подстановке указанного ядра в (1.7) функция $g(t, \nu)$ имеет вид

$$g(t, \nu) = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^2\nu^2 - \frac{1}{20}\nu^4.$$

Для нахождения приближенного решения (1.7) применим формулы (2.8)–(2.10), которые основываются на методе средних прямоугольников. Далее оценим погрешность, используя следующую формулу:

$$\varepsilon_m = \max_{i,j} \left| K^h \left(t_i, t_{j-\frac{1}{2}} \right) - \bar{K} \left(t_i, t_{j-\frac{1}{2}} \right) \right|, \quad j = \overline{1, i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.82)$$

где ε_m — это максимальная погрешность, рассчитанная для значений, полученных методом средних прямоугольников. Кроме того, воспользуемся формулами (2.18)–(2.20), основанными на методе Product Integration, и определим погрешности по следующей формуле:

$$\varepsilon_p = \max_{i,l} \left| m_{i,l} - \int_{(l-1)h}^{lh} \bar{K}(ih, s) ds \right|, \quad l = \overline{1, i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.83)$$

Здесь ε_p обозначает максимальную погрешность, вычисляемую на основе метода Product Integration.

Результаты расчета погрешностей для решения примера 1 с помощью метода средних прямоугольников и метода Product Integration представлены в Таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Погрешности для метода средних прямоугольников и метода Product Integration для примера 1

h	ε_m	ε_p
0,250000	0,17487	0,04621
0,125000	0,08631	0,01120
0,062500	0,04253	0,00272
0,031250	0,02106	0,00071
0,015625	0,01050	0,00017

Из Таблицы 2.1 видно, что в примере 1 метод средних прямоугольников демонстрирует линейную сходимость (начиная с шага $h = 0,25$, погрешность ε_m уменьшается в 2,03 раза), а метод Product Integration показывает квадратичный порядок сходимости (начиная с шага $h = 0,03125$, погрешность ε_p уменьшается в 4,18 раз).

Рассмотрим еще один пример.

Пример 2. Пусть функция $\bar{K}(t, s)$ задана следующим образом:

$$\bar{K}(t, s) = s \cos(t) + s^2.$$

В этом случае функция $g(t, \nu)$ согласно (1.7) вычисляется как

$$g(t, \nu) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{\nu^2}{6} \right) \cos t + \frac{t^3}{3} - \frac{\nu^3}{12}.$$

Таблица 2.2 – Погрешности для метода средних прямоугольников и метода Product Integration для примера 2

h	ε_m	ε_p
0,25000	0,11105	0,02907
0,12500	0,05423	0,00694
0,06250	0,02679	0,00169
0,03125	0,01331	0,00042

Согласно Таблице 2.2, метод средних прямоугольников в примере 2 характеризуется линейной сходимостью: начиная с шага $h = 0,25$, погрешность ε_m уменьшается в 2,04 раза. В то же время метод Product Integration демонстрирует квадратичный порядок сходимости, что подтверждается уменьшением погрешности ε_p в 4,1 раза при шаге $h = 0,125$.

Заметим, что классический подход к методу средних прямоугольников предполагает второй порядок сходимости. Однако в данном примере происходит потеря порядка сходимости, что согласуется с оценкой (2.26). В случае применения метода Product Integration порядок сходимости метода сохраняется, что подтверждает его эффективность для работы с таким типом уравнений (имеющих фронт нарастания).

Далее рассмотрим оценку длины интервала $[0, T]$ для (1.7). Предложенный автором эмпирический алгоритм основан на применении метода Фибоначчи и перебора длительности временных интервалов.

Приведем теперь результаты вычислительного эксперимента для модельной функции $K(t, \nu) = 1 + t\nu$ с возмущенной правой частью (1.7). Основные этапы алгоритма состоят в следующем:

1. Зададим возмущение правой части сеточного аналога (1.7) пилообразного вида, такого что $\tilde{f}(t_i, t_j) = f(t_i, t_j) + (-1)^{i+j}\delta$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, i}$, $nh = T$.

2. Для функции $K(t, \nu)$ решаем сеточный аналог задачи (1.7) с возмущенной правой частью $\tilde{f}(t_i, t_j)$, используя разностный метод средних прямоугольников, в результате чего получаем $\tilde{K}^h(t_i, t_{j-\frac{1}{2}})$.

3. Для функции $\tilde{K}^h(t_i, t_{j-\frac{1}{2}})$ вычисляем величину погрешности:

$$\|\tilde{\varepsilon}^{h(\delta)}\|_{C_h} = \max_{1 \leq j \leq i \leq n(\delta)} |K^h(t_i, t_{j-\frac{1}{2}}) - \tilde{K}^h(t_i, t_{j-\frac{1}{2}})|.$$

Критерием выбора T служили оценки $h_{opt}(\delta)$, $\|\tilde{\varepsilon}^{h(\delta)}\|_{C_h}$, полученные для классического случая в работе [23].

В Таблице 2.3 приведены оптимальные значения $h(\delta)$, минимизирующие при фиксированном δ величину $\|\tilde{\varepsilon}^{h(\delta)}\|_{C_h}$. Оптимизация шага сетки выполнена методом Фибоначчи с десятью испытаниями.

Таблица 2.3 – Погрешность $\|\tilde{\varepsilon}^{h(\delta)}\|_{C_h}$ для $T = 1/2$, $T = 7/12$, $T = 2/3$

δ	$T = 1/2$		$T = 7/12$		$T = 2/3$	
	$h_{opt}(\delta)$	$\ \tilde{\varepsilon}^{h(\delta)}\ _{C_h}$	$h_{opt}(\delta)$	$\ \tilde{\varepsilon}^{h(\delta)}\ _{C_h}$	$h_{opt}(\delta)$	$\ \tilde{\varepsilon}^{h(\delta)}\ _{C_h}$
10^{-2}	0,2649	0,1026	0,3091	0,1587	0,1812	0,2745
10^{-3}	0,0858	0,0675	0,1001	0,0801	0,0468	0,0800
10^{-4}	0,0177	0,0204	0,0206	0,0220	0,0144	0,0249
10^{-5}	0,0096	0,0069	0,0112	0,0083	0,0144	0,0124

Из Таблицы 2.3 видно, полученные результаты соответствуют классическим оценкам [23], т.е. для $T < \frac{2}{3}$ имеет место $h_{opt}(\delta) \asymp \delta^{\frac{1}{3}}$, $\|\tilde{\varepsilon}^{h(\delta)}\|_{C_h} \asymp \delta^{\frac{2}{3}}$.

2.3.2. Численные эксперименты на основе сигналов из класса кусочно-постоянных функций

Для проверки эффективности разработанного численного метода проведем несколько вычислительных экспериментов с использованием тестовых примеров.

Пример 3. Пусть функция $\bar{K}(t, s)$ задана следующим образом:

$$\bar{K}_{12}(s_1, s_2) = s_1^2 + 7s_2.$$

Учитывая это ядро, определим $\overset{(1)}{f}_{12}(t, \nu)$ и $\overset{(2)}{f}_{12}(t, \nu)$, которые соответ-

ствуют парному интегральному уравнению (1.14), (1.15):

$${}^{(1)}f_{12}(t, \nu) = \frac{7\nu(t-\nu)^2}{4} + \frac{\nu(t-\nu)(6t^2 - 8t\nu + 3\nu^2)}{12}, \quad (2.84)$$

$${}^{(2)}f_{12}(t, \nu) = \frac{\nu(t-\nu)^3}{6} + \frac{\nu(t-\nu)(21t - 14\nu)}{6}. \quad (2.85)$$

Для численного решения (1.14), (1.15) применим формулы (2.33)-(2.35) и (2.40). Для оценки точности полученных результатов введем формулу для вычисления погрешности:

$$\varepsilon = \max_{i,j} \left| m_{i,j}^{(p)} - \int_{(i-1)h}^{ih} \int_{(j-1)h}^{jh} \bar{K}^p(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right|, \quad (2.86)$$

где верхний индекс $p = 1$ соответствует ядру $\bar{K}^1 = \bar{K}_{12}(s_1, s_2)$, а $p = 2$ соответствует ядру $\bar{K}^2 = \bar{K}_{12}(s_2, s_1)$. Результаты расчета ε для тестового примера даны в Таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Результаты вычислительного эксперимента для примера 3

h	ε
0,25000	0,09115
0,12500	0,02962
0,06250	0,00826
0,03125	0,00203

Из Таблицы 2.4 видно, что начиная с $h = 0,0625$, уменьшение шага в 2 раза приводит к уменьшению ε в 4,069 раза, что соответствует ожидаемым результатам для методов второго порядка.

Пример 4. Пусть функция $\bar{K}(t, s)$ задана следующим образом:

$$\bar{K}_{12}(s_1, s_2) = s_1 s_2^3.$$

Далее определяем правые части в соответствии с этим ядром и интегральным уравнением (1.14), (1.15):

$${}^{(1)}f_{12}(t, \nu) = \frac{\nu}{24} (3t - 2\nu) (t - \nu)^4, \quad (2.87)$$

$${}^{(2)}f_{12}(t, \nu) = \frac{\nu}{40} (10t^3 - 20t^2\nu + 15t\nu^2 - 4\nu^3) (t - \nu)^2. \quad (2.88)$$

Вычисляем с помощью полученных правых частей (2.87), (2.88) и формул (2.33)-(2.35), (2.40) приближенное решение парного интегрального уравнения Вольтерра I рода (1.14), (1.15). После этого по формуле (2.86) вычисляем погрешность и получаем следующую таблицу.

Таблица 2.5 – Погрешность сеточного решения для примера 4

h	ε
0,25000	0,00683
0,12500	0,00360
0,06250	0,00133
0,03125	0,00033

Как следует из Таблицы 2.5, начиная с $h = 0,0625$, уменьшение шага сетки в 2 раза ведёт к уменьшению ε в 4,03 раза, что является характерным признаком методов второго порядка.

Таким образом, данные эксперименты показали, что для системы (1.14), (1.15) приближенное решение, определяемое методом Product Intagration, находится с точностью $O(h^2)$.

Далее рассмотрим следующие примеры, на которых проанализируем приближенное решение, полученное с помощью метода типа Рунге-Кутта.

Пример 5. Пусть функция $\bar{K}(t, s)$ задана следующим образом:

$$\bar{K}_{12}(s_1, s_2) = \gamma s_1^2 - \eta \sin(s_2),$$

где γ и η являются постоянными величинами. Для данного ядра найдем правые части (1.28), (1.29), т.е.

$$f^{(1)}(t, \nu) = \frac{\gamma h^2}{3} (3t^2 - 3th + h^2) - 2h\eta \sin\left(t - \nu - \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2},$$

$$f^{(2)}(t, \nu) = \frac{\gamma h^2}{3} (3(t - \nu)^2 - 3(t - \nu)h + h^2) - 2h\eta \sin\left(t - \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}.$$

Далее воспользуемся формулами (2.42), (2.43), а также определим погрешность как

$$\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \quad (2.89)$$

где

$$\varepsilon_1 = \max_{i,j} \left| K_{i-\frac{1}{2}, i-j-\frac{1}{2}}^h - \bar{K}_{12}(t_{i-\frac{1}{2}}, t_{i-j-\frac{1}{2}}) \right|, \\ \varepsilon_2 = \max_{i,j} \left| K_{i-j-\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}}^h - \bar{K}_{12}(t_{i-j-\frac{1}{2}}, t_{i-\frac{1}{2}}) \right|.$$

Таблица 2.6 – Погрешности для метода типа Рунге-Кутта для примера 5 при $\gamma = 2$, $\eta = -1$

h	ε
0,2500	0,000062
0,1250	0,000008
0,0625	0,000001

Как видно из Таблицы 2.6, начиная с $h = 0,125$, погрешность ε уменьшается в 8 раз.

Пример 6. Пусть функция $\bar{K}(t, s)$ задана следующим образом:

$$\bar{K}_{12}(s_1, s_2) = s_1^2 s_2^4.$$

Найдем правые части (1.28), (1.29) при данном ядре:

$$\begin{aligned} {}^{(1)}f(t, \nu) &= \frac{1}{960} (48t^5 - 12t + 1) \left((t - \nu)^5 + \left(\nu - t + \frac{1}{4} \right)^5 \right), \\ {}^{(2)}f(t, \nu) &= \frac{1}{15} \left(t^5 - \left(t - \frac{1}{4} \right)^5 \right) \left((t - \nu)^3 + \left(\nu - t + \frac{1}{4} \right)^3 \right). \end{aligned}$$

Далее воспользуемся (2.42), (2.43), а также определим погрешность по формуле (2.89).

Таблица 2.7 – Погрешности для метода типа Рунге-Кутта для примера 6

h	ε
0,25000	0,0027170
0,12500	0,0003900
0,06250	0,0000520
0,03125	0,0000065

Согласно данным Таблицы 2.7 видно, что начиная с $h = 0,0625$, погрешность ε уменьшается в 8 раз.

Таким образом, приближенное решение (1.28), (1.29), которое находилось с использованием метода типа Рунге-Кутта, находится с точностью $O(h^3)$.

2.3.3. Численные эксперименты в задаче идентификации векторного входного сигнала

Для вычислительного эксперимента построим план, состоящий из нескольких шагов, на основе пунктов 1.5.2 и 2.2.

Шаг 1. Набор данных. Экспериментальные данные будем собирать с помощью цифровой тени [110] локального участка энергоблока Назаровской ГРЭС. Сбор данных осуществляется путем подачи в качестве входного сигнала изменение расхода воды ΔD_w в конденсаторе, при постоянном значении расхода пара $D_s = 45,51$ кг/с. В другом варианте эксперимента на вход будет подаваться изменение расхода пара ΔD_s , а в качестве постоянного значения возьмем $D_w = 11562,2$ кг/с. В качестве выходных данных в обоих случаях берем изменение давления Δp в конденсаторе. Реальные данные неизбежно отягощены погрешностью. Для оценки точности используем данные, свободные от зашумления. Также отметим, что используемая нами цифровая тень способна выдавать как зашумленные сигналы, так и точные.

Шаг 2. Фильтрация данных. Для того чтобы получить из зашумленных данных фильтрованные, будем применять подход, основанный на СКС.

Шаг 3. Построение интегральных моделей. На основе полученных данных, строим интегральные модели с помощью метода Product Intagration, где y_{et} – данные, свободные от шума, \tilde{y} – зашумленные данные, \hat{y} – сглаженные данные.

Шаги 1-3 повторяются 9 раз для измерения достоверности результата.

На Рисунке 2.2 представлена блок-схема выбранного участка. Также будем полагать, что мы можем получать выходные данные при фиксированном расходе пара, но не можем получать данные при фиксированном расходе воды, а только при одновременном их изменении.

Применим (2.66) для построения модели, где $x^{(1)}(t) = \Delta D_w$, $x^{(2)}(t) = \Delta D_s$, $y^{(1)}(t) = \Delta p^{(1)}$ (изменение давления при фиксированном расходе пара), $y^{(2)}(t) = \Delta p^{(2)}$ (изменение давления при одновременном изменении рас-

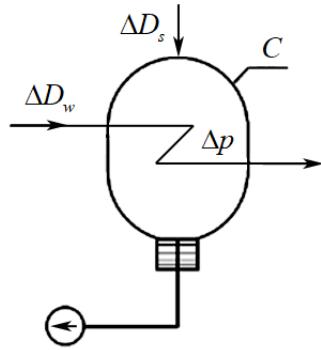


Рисунок 2.2 – Структурная схема участка пароводяного тракта энергоблока Назаровской ГРЭС

хода воды и пара), а также, добавим, что ядра Вольтерра $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ нам известны. Далее проведем апробацию полученных результатов.

В Таблице 2.8 даны результаты эксперимента, где через $\tilde{\varepsilon}_l^x$, $\hat{\varepsilon}_l^x$ обозначены относительные погрешности, вычисляемые по формулам

$$\tilde{\varepsilon}_l^x = \max_i \left| \frac{x^{(l)}(t_i) - \tilde{x}_i^{(l)}}{x^{(l)}(t_i)} \right| \cdot 100, \quad \hat{\varepsilon}_l^x = \max_i \left| \frac{x^{(l)}(t_i) - \hat{x}_i^{(l)}}{x^{(l)}(t_i)} \right| \cdot 100, \quad l = 1, 2. \quad (2.90)$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_i^x$, $i = 1, 2$, есть невязка, полученная на зашумленных значениях $\hat{y}^{(1)}$ и $\hat{y}^{(2)}$, а $\tilde{\varepsilon}_i^x$, $i = 1, 2$, получена на обработанных значениях $\tilde{y}^{(1)}$ и $\tilde{y}^{(2)}$.

Таблица 2.8 – Погрешность входного сигнала

	$\hat{\varepsilon}_1^x$	$\tilde{\varepsilon}_1^x$	$\hat{\varepsilon}_2^x$	$\tilde{\varepsilon}_2^x$
1	13,7	11,8	13,0	9,4
2	18,2	12,1	13,0	9,4
3	15,0	11,3	12,4	8,6
4	21,7	13,8	11,9	8,5
5	26,6	14,1	11,6	9,5
6	21,7	14,6	11,8	10,9
7	19,2	12,3	12,3	8,8
8	13,0	12,8	13,3	8,4
9	15,0	11,5	11,0	9,0
среднее	18,2	12,7	12,3	9,2

В Таблице 2.8 показано, что использование описанного фильтра позволяет снизить погрешность входных сигналов ΔD_w в среднем на 5,5% (разница

между столбцами 2 и 3), а ΔD_s – на 3,1% (разница между столбцами 4 и 5).

Теперь, согласно Таблице 2.8, посчитаем выходы $\hat{y}^{(l)}$, $\tilde{y}^{(l)}$ при полученных входах $\hat{x}^{(l)}$, $\tilde{x}^{(l)}$, а также вычислим погрешность по формулам

$$\tilde{\varepsilon}_l^y = \max_i \left| \frac{y^{(l)}(t_i) - \tilde{y}_i^{(l)}}{y^{(l)}(t_i)} \right| \cdot 100, \quad \hat{\varepsilon}_l^y = \max_i \left| \frac{y^{(l)}(t_i) - \hat{y}_i^{(l)}}{y^{(l)}(t_i)} \right| \cdot 100, \quad l = 1, 2. \quad (2.91)$$

Таблица 2.9 – Погрешность выходного сигнала

	$\hat{\varepsilon}_1^y$	$\tilde{\varepsilon}_1^y$	$\hat{\varepsilon}_2^y$	$\tilde{\varepsilon}_2^y$
1	18,9	9,8	10,0	4,3
2	18,1	10,4	9,0	3,2
3	17,0	8,4	9,0	7,1
4	18,2	15,0	10,0	4,0
5	17,6	7,1	10,0	5,3
6	21,7	14,8	9,0	5,1
7	15,4	12,2	10,0	4,5
8	17,2	8,1	9,0	3,1
9	19,3	9,0	7,0	2,4
среднее	18,2	10,5	9,2	4,3

В Таблице 2.9 показано, что применение сглаживающего фильтра позволяет снизить погрешность изменения давления в конденсаторе при изменении расхода воды (при постоянном расходе пара) в среднем на 7,7% (разница между столбцами 2 и 3), а при одновременном изменении расхода воды и пара – на 4,9% (разница между столбцами 4 и 5).

2.4. Выводы ко второй главе

Во второй главе рассмотрены численные методы решения интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования, возникающих в задаче идентификации нелинейной динамики. Разработаны вычислительные алгоритмы для двух классов интегральных уравнений: на основе кусочно-линейных и кусочно-постоянных тестовых сигналов. Для случая, когда на вход подавались сигналы кусочно-линейного типа, для построения численного решения были применены методы средних прямоугольников и

Product Integration. Для полученных сеточных решений были доказаны теоремы о существовании и единственности, исследована сходимость разностных схем. На примерах было показано, что решение, построенное с помощью метода средних прямоугольников, имеет линейную скорость сходимости, а решение, которое было построено методом Product Integration – квадратичную. Преимущество рассмотренных методов состоит в возможности их обобщения на случай кусочно-непрерывных тестовых сигналов иного вида, а именно путем изменения формы сигнала (1.6) на нелинейный вид $\left(\frac{t}{\nu}\right)^{1/n}$, где $n \in \mathbb{N}$ (\mathbb{N} – множество натуральных чисел). При подстановки этого сигнала в (1.5) получаем уравнение Вольтерра I рода вида

$$\int_0^\nu K(t, s) \left(\frac{s}{\nu}\right)^{1/n} ds + \int_\nu^t K(t, s) ds = g(t, \nu), \quad (2.92)$$

где $g(t, \nu)$ – отклик динамической системы, $g(0, 0) = 0$, $K(t, \nu)$ принадлежит $\Delta = \{t, \nu : 0 \leq \nu \leq t \leq T\}$. Решение (2.92) относительно $K(t, \nu)$ получено Солодушей С.В. и находится как $K(t, s) = -\left((n+1)\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} + n\nu\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2}\right)$. Для случая, когда входными сигналами были кусочно-постоянные сигналы, разработаны численные алгоритмы на основе метода Рунге-Кутта. Рассмотрена задача идентификации несимметричных ядер в кубических полиномах Вольтерра, для решения которой была предложена модификация метода шагов для трехмерного случая. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие теоретические оценки скорости сходимости. Исследована задача восстановления векторного входа в полиномах Вольтерра. Для обработки зашумленных данных применен фильтр на основе СКС, что позволило снизить погрешность моделирования. Разработаны численные схемы для систем с квадратичной и кубической нелинейностью, включая метод декомпозиции отклика. Апробация методов проведена на модельных примерах и реальных данных с энергоблока Назаровской ГРЭС. Показано, что использование сглаживающего фильтра снижает погрешность идентификации входа на 3 – 5%, а моделирование выхода – на 5 – 8%. Оптимальный шаг сетки в этом случае определяется с помощью метода Фибоначчи. Результаты главы опубликованы в работах [2–7; 9–13; 99; 100; 128; 130; 156; 160].

Глава 3. Алгоритмы ПВК для динамических систем типа «вход-выход»: обзор и апробация для задач в теплоэнергетике

Данная глава посвящена описанию программного обеспечения, входящего в ПВК «Динамика» [105], написанного для моделирования динамических систем в виде полиномов Вольтерра. Алгоритмы, представленные в главе, имеют универсальный характер и прошли апробацию на тестовых примерах.

Пункт 3.1 имеет обзорный характер. В нем рассмотрены программные средства других авторов для реализации вычислительных процедур с помощью полиномов Вольтерра.

Пункт 3.2 посвящен развитию и модификации программно-вычислительного комплекса «Динамика» за счет применения методов высокого порядка. Также рассмотрены вычислительные алгоритмы, реализованные автором в [14; 15; 52].

В пункте 3.3 представлено описание приложения разработанных алгоритмов в задаче моделирования динамики крупной энергетической системы.

3.1. Современные программно-вычислительные комплексы: обзор, анализ и перспективы

Особенность разработанных программных средств заключается в применении авторской методики построения модели для квадратичного отрезка ряда Вольтерра. Это обеспечивает быстродействие созданного программного обеспечения.

Для анализа динамических систем разработан целый спектр программных продуктов, которые можно классифицировать по уровню требуемой математической формализации:

1. Системы компьютерной алгебры и численного анализа. Данная категория представлена такими комплексами как MATLAB, Maple, Mathematica, MathCAD, основное назначение которых – проведение сложных символьных преобразований и точных численных вычислений.

2. Системы моделирования узкоспециализированных процессов: такие как VisSim, iGrafx, Rockwell Arena, Microwave Office, NI Multisim. Эти пакеты используются для моделирования специфических физических, химических,

биологических и экономических процессов, позволяя пользователям проводить эксперименты в целевых областях, часто без глубокой математической формализации.

3. Универсальные средства визуально-ориентированного моделирования: MATLAB Simulink, MvStudium и др., которые обладают обширной библиотекой инструментов и позволяют пользователям сочетать возможности программирования на математическом уровне с визуальной разработкой моделей.

4. Авторские пакеты, разработанные с использованием языков программирования высокого уровня, включающие C++, Pascal, Fortran. Хотя разработка таких пакетов является трудоемким процессом, они позволяют создавать универсальные модули, которые могут быть адаптированы для различных технических систем.

Активно развивается направление, связанное с созданием специализированного программного обеспечения для моделирования динамических систем на основе интегро-степенных рядов Вольтерра. Известным примером подобного инструмента служит модуль Voltaire XL, входящий в состав платформы Microwave Office 2000 и применяемый преимущественно для частотного анализа переходных процессов. Вместе с тем, его использование при работе во временной области остаётся ограниченным. Примечательно, что, несмотря на теоретическую разработанность метода, современные универсальные среды математического моделирования практически не включают инструментов для работы с полиномами Вольтерра. Основным препятствием для их широкого внедрения остаётся проблема идентификации ядер, требующая сложных вычислительных процедур и не имеющая универсальных алгоритмов.

С ростом популярности языков программирования, таких как Python, наблюдается рост интереса к построению инструментов для моделирования динамических систем. Таким образом, развитие программных инструментов для моделирования динамических систем продолжает оставаться актуальной задачей, комбинируя преимущества различных языков программирования и методологий для улучшения процессов моделирования и идентификации.

Обзор литературных источников (п. 1.2) по применению рядов Вольтерра к моделированию нелинейных систем выявляет несколько перспективных

направлений, где необходимо задействовать компьютерное моделирование:

- тестовая диагностика технического состояния объекта;
- мониторинг отклика объекта на входные воздействия в исследуемом диапазоне значений;
- автоматическое управление нелинейной динамикой объекта для корректировки входных возмущений.

Первое направление реализуется посредством идентификации переходных характеристик. Второе связано с активностью использования компьютерных тренажеров как инструмента, адекватно описывающего динамические свойства систем. В рамках третьего ключевую роль играет разработка реализуемых на практике методов управления, в числе которых – алгоритмы формирования управляющих входных сигналов.

Итак, применение полиномов Вольтерра дает возможность для разработки специализированного ПО, предназначенного для решения обратных задач (например, задач идентификации переходных характеристик и восстановления входного сигнала), а также построения динамических моделей. Названные принципы были реализованы в рамках модернизации программного пакета «Динамика». Описание архитектуры пакета, его ключевые свойства и функционал кратко представлены в следующем пункте.

Также отметим, что распространение концепции интеллектуальной энергетики (Smart Grid) существенно зависит от успешного решения проблем перехода к энергетическим системам с интеллектуальной инфраструктурой с применением современных информационных технологий. До последнего времени одним из распространённых инструментов системного исследования энергетики выступали методы математического моделирования. В Институте систем энергетики имени Л.А. Мелентьева СО РАН успешно разработан и реализован двухэтапный подход разработки стратегий развития энергетических систем, основанных на применении когнитивных моделей и средств графического анализа (верхний уровень) и математических моделей (нижний уровень).

В рассмотренной диссертационной работе подход на основе применения

рядов Вольтерра может быть использован для решения задач математического моделирования отклика теплообменного аппарата, а именно Δp , Δt , $\Delta t_{\text{ПНД}}$, а также в задаче восстановления входного сигнала ΔD_w , ΔD_s , обеспечивающего требуемые значения Δt на выходе из конденсатора, входящего в выделенный участок пароводяного тракта крупной энергетической системы.

3.2. Развитие и модификация программно-вычислительного комплекса «Динамика»

Программный комплекс «Динамика» предназначен для создания и верификации интегральных моделей нелинейных динамических систем. Разработка выполнена в среде Borland C++ Builder с применением принципов объектно-ориентированного программирования и модульной архитектуры. Пакет обладает широкой областью применения, включая задачи тепло- и электроэнергетики.

Функциональность включает расчет выходных характеристик имитационных моделей и анализ динамики вращательных элементов ветрогенераторов. Для решения последней задачи используется интеграция с моделями, разработанными в MATLAB Simulink.

Архитектура системы разделена на системную и прикладную части. Системный компонент отвечает за пользовательский интерфейс и координацию вычислительных модулей. Ввод параметров и визуализация результатов осуществляются через диалоговые окна и элементы управления, что обеспечивает возможности для исследования моделей и управления входными воздействиями.

Расчетные модули основаны на откликах имитационных моделей и включают:

- идентификацию полиномов Вольтерра для различных типов входных сигналов;
- вычисление откликов при произвольном воздействии;
- модуль для подсчета управляющего входного воздействия, чтобы обеспечить заданный отклик модели.

Ниже представлена блок-схема ПВК «Динамика», в которой первый блок отвечает за выбор задачи, которая будет выполняться. Далее на основе полиномов Вольтерра строится модель, где второй основной блок определяет метод решения поставленных задач.

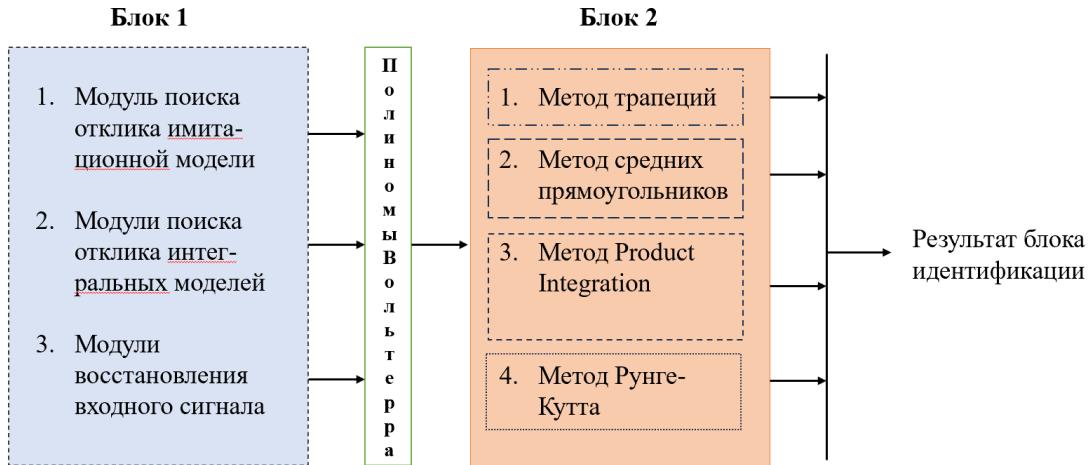


Рисунок 3.1 – Блок-схема ПВК «Динамика»

Ранее в ПВК «Динамика» был реализован подход, основанный на применении метода трапеций (блок 2.1). Автором работы предлагается ввести три дополнительных блока, основанных на применении метода средних прямоугольников (блок 2.2), метода Product Integration (блок 2.3) и метода Рунге-Кутта (блок 2.4). Далее рассмотрим более подробно программы, которые способствуют развитию ПВК «Динамика».

Блок-схемы позволяют наглядно представить алгоритм решения интегрального уравнения, абстрагируясь от программной реализации и фокусируясь на ключевых вычислительных этапах. Далее перейдем к подробному описанию схем.

3.2.1. Вычислительный алгоритм на основе метода средних прямоугольников для интегрального уравнения Вольтерра I рода с нестационарным ядром

Рассмотрим блок-схему алгоритма, применяющего метод средних прямоугольников для приближенного решения уравнения (1.7) (Рисунок 3.2).

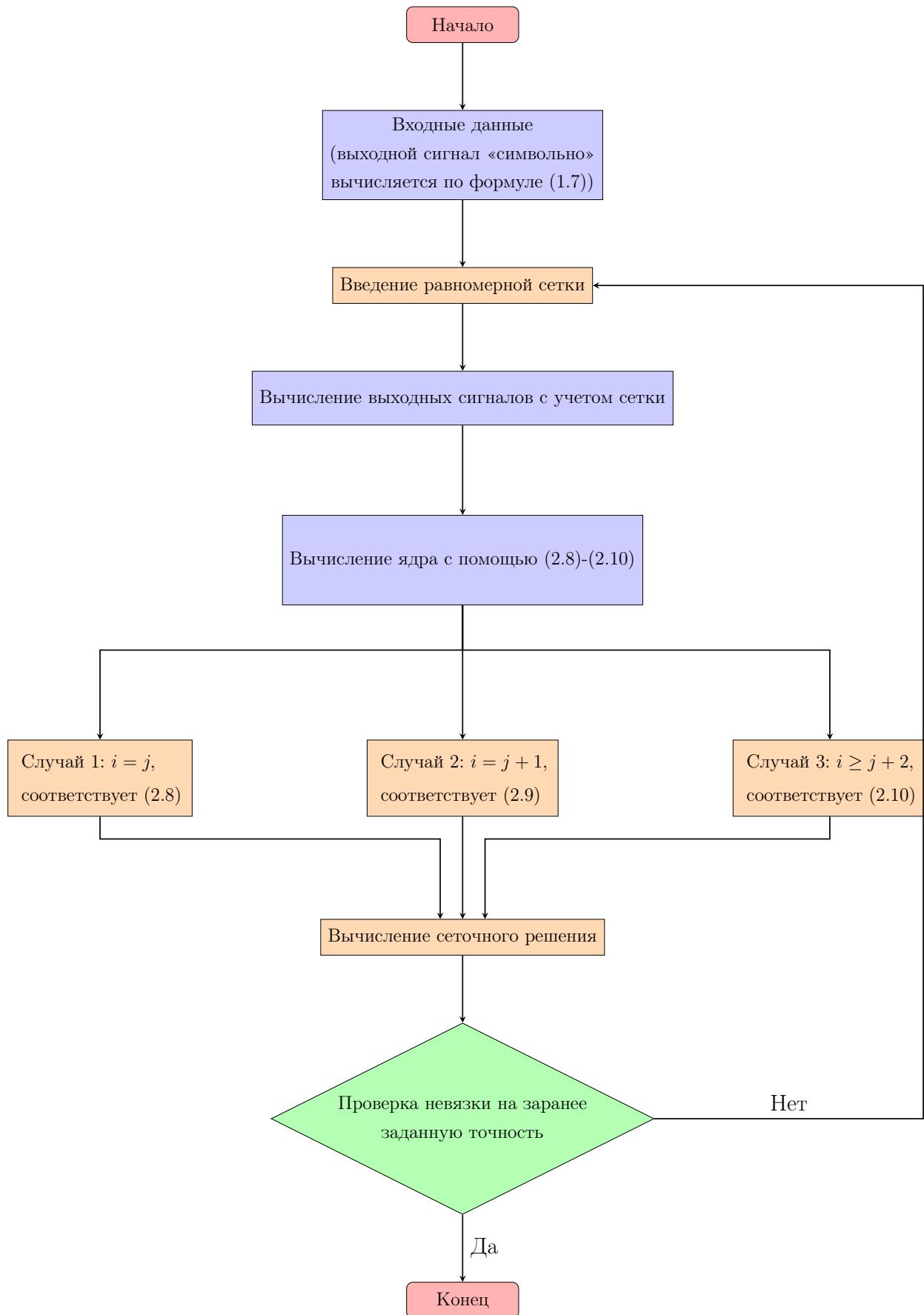


Рисунок 3.2 – Блок-схема алгоритма численного решения интегрального уравнения (1.7)

Алгоритм начинается с узла «Начало», обозначающего старт вычислительного процесса. На этапе входных данных (1.7) определяются исходные параметры задачи, включая аналитическое представление ядра интегрального уравнения и выходного сигнала. Производится дискретизация расчетной области с равномерным шагом, что позволяет перейти к конечно-разностной аппроксимации задачи.

Вычислительный процесс разделяется на три ветви в зависимости от соотношения индексов сеточных узлов. Для диагональных элементов $i = j$ применяется формула (2.8), для соседних узлов $i = j + 1$ – формула (2.9), а для всех остальных случаев $i \geq j + 2$ – формула (2.10). Такой подход обеспечивает вычисление ядра интегрального оператора на сетке.

На этапе верификации осуществляется контроль точности полученного решения. Вычисляется значение ядра в средних точках интервалов, после чего определяется погрешность аппроксимации. Если достигнутая точность недостаточна, алгоритм предусматривает возврат к этапу введения равномерной сетки для изменения размерности сетки. При удовлетворительных результатах вычислений процесс завершается в узле «Конец».

Представленная блок-схема реализует численный метод решения интегрального уравнения (1.7), основанный на формулах (2.8)-(2.10) и процедуры итерационного контроля точности.

Далее рассмотрим алгоритмы, вычисляющие приближенное решение для уравнения (1.28), (1.29).

3.2.2. Вычислительные алгоритмы для интегрального уравнения Вольтерра I со стационарным ядром

Рассмотрим два варианта интегральных уравнений Вольтерра, полученных, в первом случае, на сигналах кусочно-постоянного типа минимальной длительностью h (это уравнение (1.28), (1.29)), а, во втором случае – на сигналах кусочно-линейного типа (это уравнение (1.14), (1.15)).

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ТИПА
РУНГЕ-КУТТА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА I СО
СТАЦИОНАРНЫМ ЯДРОМ

В основе представленного метода лежит решение интегрального уравнения (1.28), (1.29). Блок-схема алгоритма его численной реализации приведена на Рисунке 3.3. Алгоритм включает дискретизацию задачи, построение матричной системы и итерационное уточнение решения. Далее следует детальное описание схемы и вычислительного процесса.

Алгоритм начинается с узла «Начало», инициирующего вычислительный процесс. На этапе задания исходных параметров определяются начальные условия и аналитическое описание ядра интегрального уравнения. Затем осуществляется переход к дискретной форме задачи путём построения расчётной сетки с использованием равномерного шага.

Ключевой особенностью метода является применение блочно-матричного подхода, обусловленного наличием подсетки. Данный подход требует введения подматриц, содержащих коэффициенты, расположенные в узлах этой подсетки. Вычислительный алгоритм разделяется на две ветви в зависимости от взаимного расположения узлов расчётной сетки. Для каждого случая формируется отдельная система алгебраических уравнений, которая решается соответствующими матричными методами.

На этапе верификации осуществляется контроль точности полученного решения через процедуру итерационного уточнения. Если достигнутая точность не удовлетворяет заданным критериям, алгоритм предусматривает возврат к этапу построения расчётной сетки для её модификации. При выполнении условий точности процесс завершается в узле «Конец» с формированием выходных данных в виде дискретного приближения искомого ядра.

Представленный алгоритм реализует эффективный численный метод решения интегральных уравнений, сочетающий аналитические преобразования с применением блочных матриц и адаптивной сетки, что обеспечивает устойчивость и точность вычислений.

Далее рассмотрим блок-схему, описывающую поиск приближенного решения уравнения (1.14), (1.15).

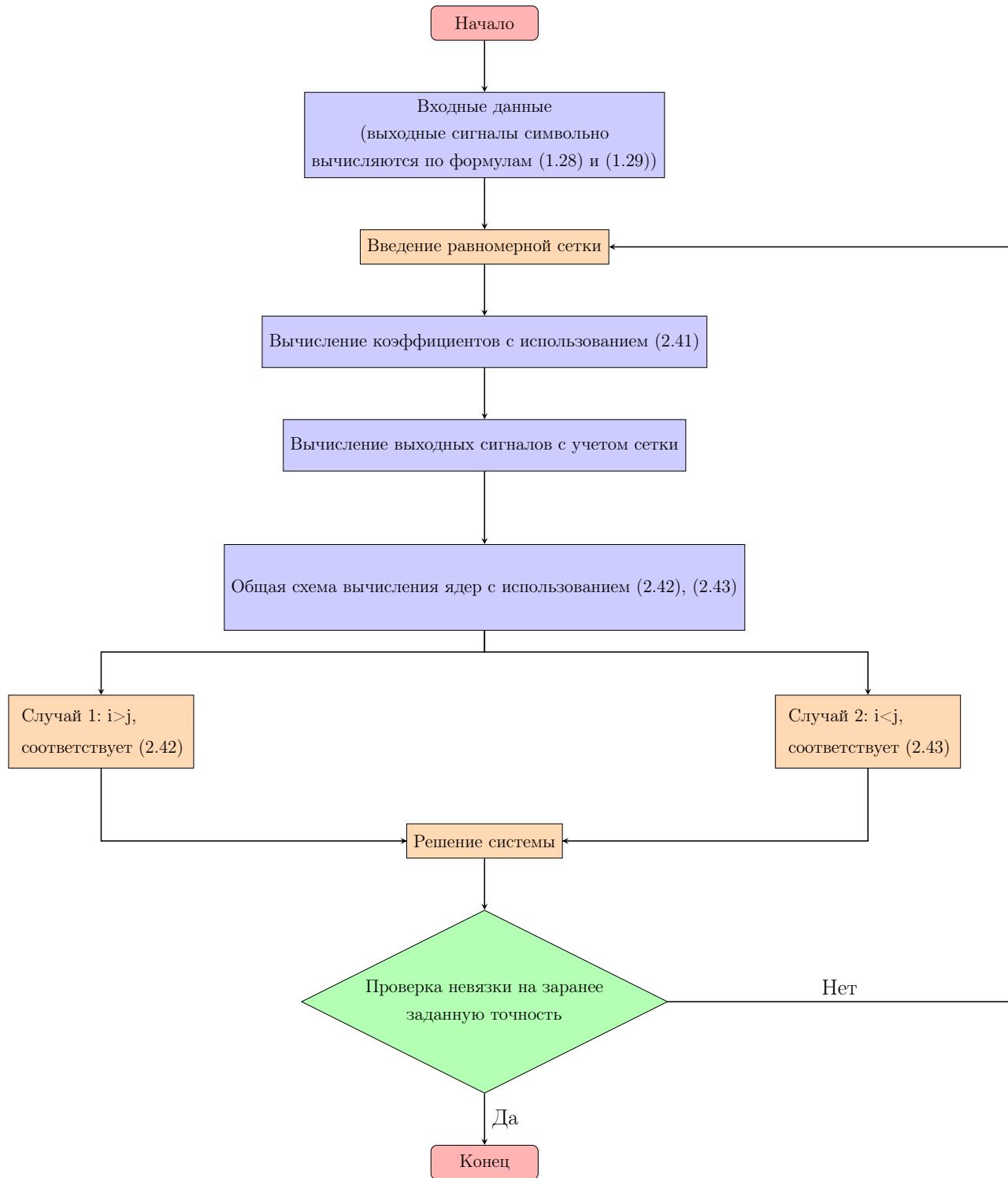


Рисунок 3.3 – Блок-схема алгоритма численного решения интегрального уравнения (1.28), (1.29)

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СРЕДНИХ
ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА I
РОДА СО СТАЦИОНАРНЫМ ЯДРОМ

Блок-схема 3.4 представляет вычислительный процесс решения интегрального уравнения, начинающийся с задания входных параметров и аналитического вида ядра, по которому символно вычисляются выходные сигналы согласно формулам (1.14) и (1.15). На следующем этапе производится дискретизация расчетной области с построением равномерной сетки, что позволяет перейти к конечно-разностной аппроксимации задачи.

Блок-схема реализует вычислительный процесс, который начинается с узла «Начало». Основная вычислительная часть алгоритма разделяется на три логические ветви в зависимости от взаимного расположения узлов сетки. Для случая крайнего левого узла $j = 1$ применяется формула (2.33), для случая $i - j > 1$ – (2.34), при соседних узлах $i - j = 1$ используется (2.35). Такой подход обеспечивает корректное вычисление элементов искомого решения на сетке.

Заключительный этап алгоритма включает вычисление сеточного решения и оценку погрешности численного метода. Если точность не удовлетворяет заданным критериям, реализуется обратная связь с возвратом к этапу введения равномерной сетки. При достижении требуемой точности вычислительный процесс завершается в узле «Конец».

Представленная схема демонстрирует типичный для вычислительной математики итерационный подход, сочетающий аналитические преобразования с процедурой контроля точности.

Таким образом, в пункте 3.2 был рассмотрен программно-вычислительный комплекс «Динамика», разработанный для построения и тестирования интегральных моделей нелинейной динамики. В его состав входят модули для вычисления откликов имитационных моделей. Модули разделены на системную часть, отвечающую за пользовательский интерфейс, и прикладную, включающую идентификацию полиномов Вольтерра, вычисление откликов при произвольных воздействиях и расчет управляющих входных воздействий.

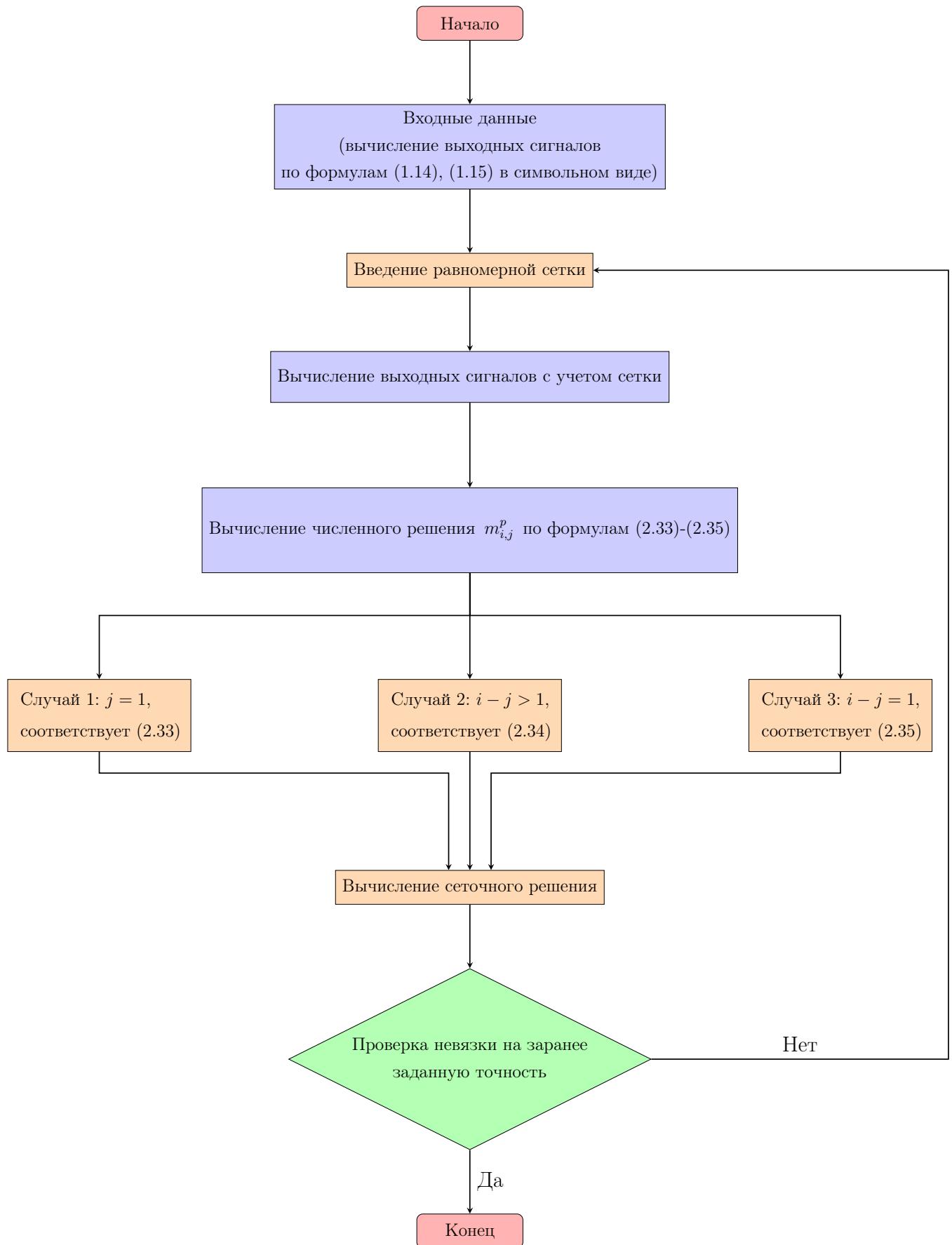


Рисунок 3.4 – Блок-схема алгоритма численного решения интегрального уравнения (1.14), (1.15)

В рамках развития комплекса предложено введение трех дополнительных блоков, реализующих метод средних прямоугольников, метод Рунге-Кутта и метод Product Integration. Для каждого из методов разработаны соответствующие алгоритмы, включающие этапы дискретизации, вычисления коэффициентов, разделения на случаи в зависимости от взаимного расположения узлов сетки, решения систем уравнений и контроля точности. Алгоритмы предусматривают итерационный процесс уточнения решения с возможностью возврата к этапу введения сетки при недостаточной точности результатов.

3.3. Моделирование динамики переходных процессов крупной энергетической системы

Моделирование динамики переходных процессов в крупных энергетических системах требует применения современных математических методов, способных учитывать нелинейные эффекты и взаимовлияние различных подсистем. В данном исследовании используется подход, основанный на интегральных моделях Вольтерра, который позволяет адекватно описывать сложные динамические процессы, характерные для энергетических объектов.

Ключевыми этапами предлагаемой методологии являются: выбор тестовых сигналов, обеспечивающих возбуждение всех значимых динамических характеристик системы; идентификация ядер Вольтерра с использованием специализированных алгоритмов; верификация полученных моделей на различных классах входных воздействий; оптимизация параметров моделей для достижения требуемой точности.

Особое внимание уделяется сравнению различных подходов к идентификации ядер Вольтерра, так как от выбора методики идентификации существенно зависят точность и область применимости получаемых моделей. В частности, рассматривается влияние вида тестовых сигналов на качество идентификации и последующее поведение модели при работе с реальными возмущениями.

3.3.1. Сравнение подходов к идентификации ядер Вольтерра для квадратичной модели

Рассмотрим квадратичную модель, содержащую линейную нестационарную составляющую:

$$y(t) = \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_{11}(s_1, s_2)x(t - s_1)x(t - s_2)ds_1ds_2, \quad t \in [0, T]. \quad (3.1)$$

Для идентификации ядер Вольтерра $K_1(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, $K_{11}(s_1, s_2)$, $0 \leq s_1, s_2 \leq t \leq T$, автор работы [18] использовал тестовые сигналы вида

$$x(t) \equiv x_{\nu}^{\alpha_{1,2}}(t) = \alpha_{1,2}(e(t) - e(t - \nu)), \quad 0 \leq \nu \leq t \leq T, \quad (3.2)$$

где $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Подстановка (3.2) в (3.1) приводит к следующей системе:

$$\alpha_1 \int_0^{\nu} K_1(t, s)ds + \alpha_1^2 \int_{t-\nu}^t \int_{t-\nu}^t K_{11}(s_1, s_2)ds_1ds_2 = y^{\alpha_1}(t, \nu), \quad (3.3)$$

$$\alpha_2 \int_0^{\nu} K_1(t, s)ds + \alpha_2^2 \int_{t-\nu}^t \int_{t-\nu}^t K_{11}(s_1, s_2)ds_1ds_2 = y^{\alpha_2}(t, \nu), \quad (3.4)$$

где $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $0 \leq \nu \leq t \leq T$, что подразумевает, что

$$\int_0^{\nu} K_1(t, s)ds = f_1(t, \nu), \quad (3.5)$$

$$\int_{t-\nu}^t \int_{t-\nu}^t K_{11}(s_1, s_2)ds_1ds_2 = f_2(t, \nu), \quad (3.6)$$

где

$$f_1(t, \nu) = \frac{\alpha_2^2 y^{\alpha_1}(t, \nu) - \alpha_1^2 y^{\alpha_2}(t, \nu)}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad (3.7)$$

$$f_2(t, \nu) = \frac{\alpha_1 y^{\alpha_2}(t, \nu) - \alpha_2 y^{\alpha_1}(t, \nu)}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (3.8)$$

Проведем процедуру идентификации ядра Вольтерра $K_{11}(s_1, s_2)$, симметричного относительно переменных s_1, s_2 , используя уравнения (1.25) и (3.8). Тогда задача идентификации $K_1(t, s)$ из (3.1) сводится к решению

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds = q(t), \quad (3.9)$$

$$q(t) = y(t) - \int_0^t \int_0^t K_{11}(s_1, s_2) x(t-s_1) x(t-s_2) ds_1 ds_2, \quad (3.10)$$

где $K_{11}(s_1, s_2)$ заданы. Применяя тестовые сигналы (1.6) в дополнение к (3.2), получаем уравнения (3.9), (3.10), что можно представить в виде (1.7). Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} q(t, \nu) &= g(t, \nu) - \int_{t-\nu}^t \int_{t-\nu}^t K_{11}(s_1, s_2) \frac{t-s_1}{\nu} \frac{t-s_2}{\nu} ds_1 ds_2 - \\ &- 2 \int_{t-\nu}^t ds_1 \int_0^{t-\nu} K_{11}(s_1, s_2) \frac{t-s_2}{\nu} ds_2 - \int_0^{t-\nu} \int_0^{t-\nu} K_{11}(s_1, s_2) ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

Здесь функция $g(t, \nu)$ представляет собой отклик динамической системы на входное воздействие (1.6) при $0 \leq \nu \leq t \leq T$. Таким образом, для определения ядра $K_1(t, s)$ была получена формула (1.8).

Сравним эффект использования тестовых сигналов (1.6) и (3.2) при построении интегральной модели (3.1).

В представленном ниже примере показано, как использование тестовых сигналов вида (1.6) позволяет повысить точность моделирования. Далее рассмотрим пример.

Пример 7. Пусть эталонная динамическая система представлена кубическим полиномом Вольтерра с ядрами $K_1 = 1$, $K_{11} = \frac{1}{2}$, $K_{111} = \frac{1}{3}$, так что

$$y_{et}(t) = \int_0^t x(s) ds + \frac{1}{2} \left(\int_0^t x(s) ds \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\int_0^t x(s) ds \right)^3. \quad (3.11)$$

Алгоритм построения полиномов Вольтерра второго и третьего порядков с использованием кусочно-постоянных сигналов вида (3.2) был успешно применён к системам разной физической природы. В их число вошли: модель (3.11), элемент теплообменного аппарата и ветроэнергетическая установка [53]. Отметим, что (3.11) представляет собой частичную сумму ряда для функции (1.43).

Данная функция успешно используется при исследовании областей применимости алгоритмов идентификации для квадратичных и кубических по-

линомов Вольтерра [53; 155]. Применим процедуру восстановления ядер с использованием тестовых сигналов (3.2) с амплитудами $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha > 0$. В результате вместо выражения (3.1) получаем:

$$y_1(t) = \int_0^t \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}s^2\right) x(s) ds + \frac{1}{2} \left(\int_0^t x(t-s) ds \right)^2, \quad (3.12)$$

где ядра Вольтерра были восстановлены с использованием уравнений (1.20) и (1.25) соответственно.

Объединенная модель (3.1) с добавлением к (3.2) тестовых сигналов (1.6) с амплитудой α для идентификации $K_1(t, s)$ имеет вид

$$y_2(t) = \int_0^t \left(1 + \alpha^2 \left(\frac{1}{4}s^2 - \frac{3}{4}ts + \frac{1}{2}t^2\right)\right) x(s) ds + \frac{1}{2} \left(\int_0^t x(t-s) ds \right)^2, \quad (3.13)$$

где идентификация ядра была выполнена с использованием уравнений (1.8) и (1.25) соответственно. На сигналах

$$x^\beta(t) = \frac{t}{\beta}, \quad (3.14)$$

где $\beta = 0,01k\alpha$, $k = \overline{1, B}$ (B – отклонение от начального значения в %), модель (3.12) дает остаток

$$n_1(t) = y_{et}^\beta(t) - y_1^\beta(t) = \frac{t^6}{48\beta^3} - \frac{\alpha^2 t^4}{8\beta},$$

а модель (3.13) дает остаток

$$n_2(t) = y_{et}^\beta(t) - y_2^\beta(t) = \frac{t^6}{48\beta^3} - \frac{\alpha^2 t^4}{16\beta},$$

где y_{et}^β – отклик (3.11) на сигнал (3.14).

Приведем алгоритм построения полинома (3.1) для моделирования отклика динамической системы, представленной в виде (3.11).

Шаг 1. Расчет значений $y_{et}^\alpha(t, \nu)$ и $y_{et}^{-\alpha}(t, \nu)$ с помощью подстановки (3.2) с амплитудой $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha > 0$ в правую часть (3.11).

Шаг 2. Расчет по (3.8) значений правой части интегрального уравнения (3.6).

Шаг 3. Применение уравнения (1.25) для определения $K_{11}(s_1, s_2)$, $0 \leq s_1, s_2 \leq T$.

Шаг 4. Расчет значений $y_{et}^\alpha(t, \nu)$ с помощью подстановки (1.6) с амплитудой α в правую часть (3.11).

Шаг 5. Расчет правой части (1.7) $q(t, \nu)$, где $K_{11}(s_1, s_2)$ и $q(t, \nu) \equiv y_{et}^\alpha(t, \nu)$ получены на предыдущих шагах 3 и 4 соответственно.

Шаг 6. Применение уравнения (1.8) для определения $K_1(t, \nu)$, $0 \leq \nu \leq t \leq T$.

Шаг 7. Подстановка ядер $K_{11}(s_1, s_2)$ и $K_1(t, \nu)$, полученных на шагах 3 и 6 соответственно, в правую часть (3.1). Это приводит к (3.13).

Точность моделирования $y_1(t)$ сравнивалась с откликом $y_2(t)$. В качестве критерия точности моделирования было выбрано значение коэффициента средней абсолютной ошибки:

$$MAE_r(t) = \frac{1}{B} \sum_{\beta=1}^B |n_r(t)|, \quad r = 1, 2, \quad t \in [0, 15].$$

На Рисунке 3.5 черным цветом показаны области выполнения неравенства $MAE_2(t) < MAE_1(t)$ при $B = 10, 25, 40$ с точностью $\delta = 10^{-2}$.

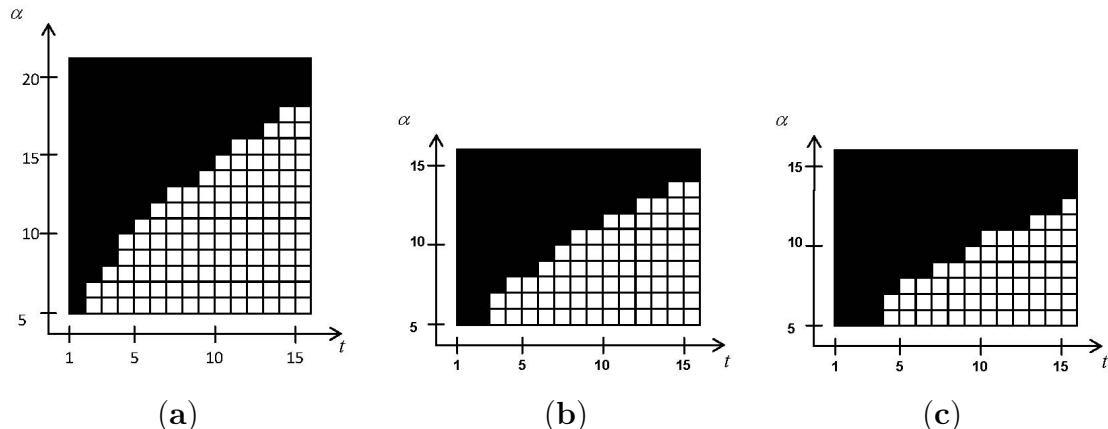


Рисунок 3.5 – Области выполнения неравенства $MAE_2(t) < MAE_1(t)$ при (а) $B = 10$, (б) $B = 25$ и (с) $B = 40$

Вычислительный эксперимент показал, что области эффективности интегральных моделей (3.12) и (3.13) зависят от длины отрезка T , амплитуды тестовых сигналов α , используемых для идентификации ядер Вольтерра, и точности вычислений δ .

В работе [101] отмечена методическая роль модели, отклики которой формируются с помощью (1.43). Было показано, что области применимости квадратичных отрезков ряда Вольтерра, ядра которых построены на основе откликов математической динамической системы (1.43) и имитационной модели элемента теплообменной установки (1.54), пересекаются. Идентификация полиномов Вольтерра проводилась с помощью кусочно-постоянных тестовых сигналов длительностью ν (3.2). Переходя далее к сравнению областей применимости интегральной модели, построенной с помощью предлагаемого в диссертации подхода на основе кусочно-постоянных тестовых сигналов, выберем в качестве пробного входного сигнала $\Delta D(t)$ возмущение вида (3.14), $\Delta Q(t) = 0$. Проведем анализ выполнимости неравенства $MAE_2(t) < MAE_1(t)$ применительно к полиномам, ядра Вольтерра в которых восстановлены на основе кусочно-постоянных и кусочно-линейных тестовых сигналов. Результаты вычислительного эксперимента представлены на Рисунке 3.6, где цифрой 1 отмечена область выполнения неравенства $MAE_2(t) < MAE_1(t)$ с использованием откликов имитационной модели (1.54), а цифрой 2 – с использованием откликов (1.43). На рисунке приняты следующие обозначения: α – амплитуда (%), $t \in [0, T]$, T – длительность интервала (с).

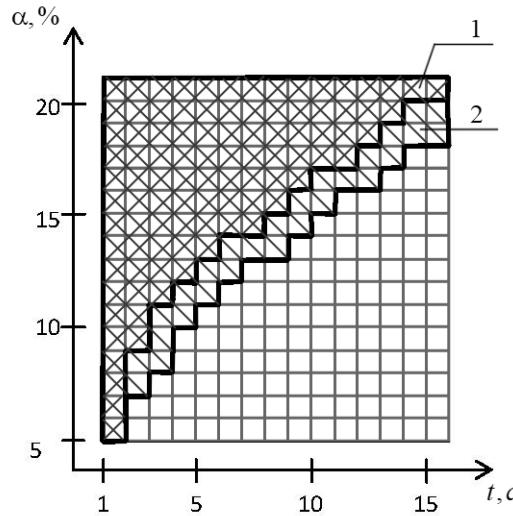


Рисунок 3.6 – Области эффективности интегральных моделей (1.54) и (1.43) при $B = 10$

Эксперименты показали, что при тестовых сигналах кусочно-линейного вида (1.6), где фронт нарастания менее 10% от длины исследуемого интервала, эффективно использовать кусочно-постоянные тестовые сигналы вида

(3.2). Данный результат в части учета тестового сигнала ступенчатого вида согласуется с рекомендациями специалистов в теплоэнергетике, в частности в работе [81].

Таким образом, в данном пункте проведено сравнение двух подходов к идентификации ядер Вольтерра для квадратичной модели. Первый подход основан на использовании тестовых сигналов вида ступенчатых функций с различными амплитудами. Второй подход дополнен тестовыми сигналами кусочно-линейного типа, что привело к уточнению выражения для линейного ядра в полиноме Вольтерра. Разработан алгоритм построения квадратичной модели, включающий алгоритм идентификации ядер и верификацию результатов. Проведен вычислительный эксперимент, демонстрирующий зависимость точности моделей в виде комбинированных квадратичных полиномов Вольтерра от параметров идентификации.

3.3.2. Оптимизация амплитуд входных возмущений и оценка точности моделей

После анализа откликов моделей на различные входные возмущения важно рассмотреть, как изменения амплитуды влияют на точность моделей. В частности, мы сосредоточимся на погрешностях, возникающих при отклонении амплитуды от стационарного значения. Это позволит лучше понять, как различные параметры, такие как расход воды и пара, влияют на динамику системы.

Далее обратимся к объекту, описанному в пункте 1.5.2. Построение моделей осуществлялось опираясь на амплитуды входных сигналов.

Модели настраивались на амплитуды, которые составляли 30% от стационарного значения как для случая с расходом воды, так и с расходом пара. На Рисунках 3.7, 3.8 изображены отклики интегральной и эталонной моделей для сигнала вида

$$x(t) = \mu(e(t) - 2e(t - 32)), \quad (3.15)$$

где μ – амплитуда сигнала.

Буквенное разбиение Рисунков 3.7, 3.8 соответствуют пояснениям к Рисунку 1.5. На рисунках сплошной линией обозначен отклик эталонной моде-

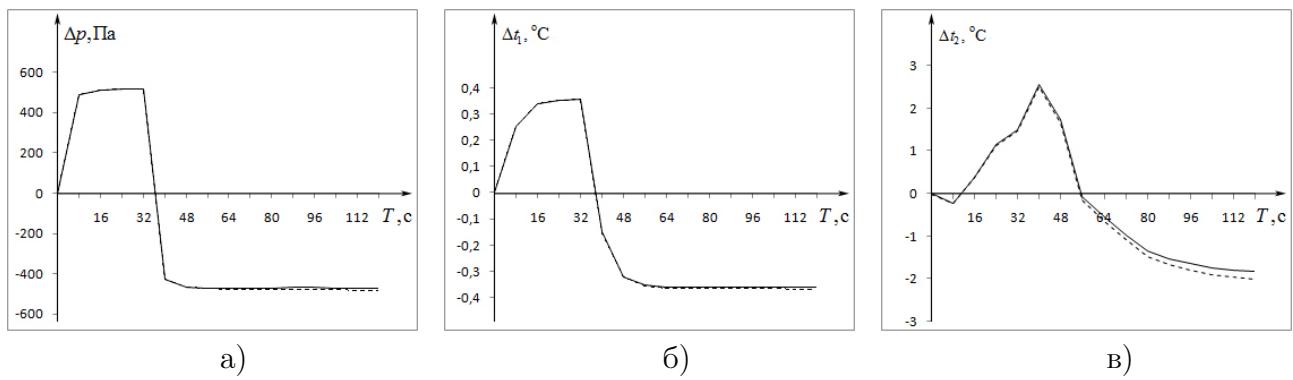


Рисунок 3.7 – Графики изменения давления а) температуры в конденсаторе, б) температуры в ПНД, в) при входном возмущении расхода пара

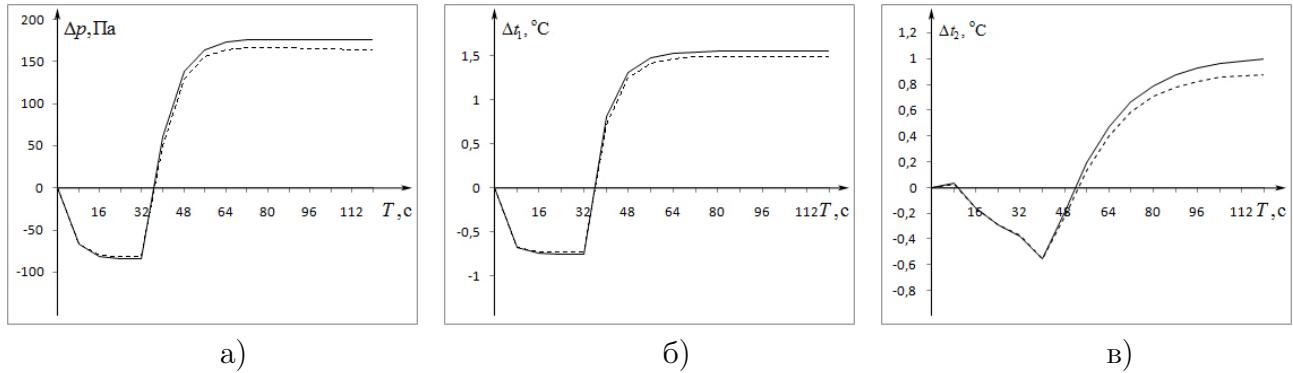


Рисунок 3.8 – Графики изменения давления а) температуры в конденсаторе, б) температуры в ПНД, в) при входном возмущении расхода воды

ли, пунктирной – отклик интегральной модели. На них видно, что погрешность во всех трех моделях имеет одинаковую структуру, в начале отрезка погрешность близка к нулю, однако, по мере приближения к концу отрезка погрешность нарастает. Максимальная погрешность для сигнала вида (3.15) достигается на конце отрезка. Поэтому ограничимся всего двумя таблицами для иллюстрации точности моделирования.

Для полученных моделей были построены таблицы погрешностей при отклонении амплитуды от стационарного значения на 35% (Таблицы 3.1, 3.2).

Таблица 3.1 – Погрешность, возникающая при входном возмущении в виде изменения расхода пара

	ε_{abs}	ε_{otn}
Δp	11,48Па	2,5%
Δt_1	0,0085 °C	2,4%
Δt_2	0,1737 °C	9,5%

Таблица 3.2 – Погрешность, возникающая при входном возмущении в виде изменения расхода воды

	ε_{abs}	ε_{otn}
Δp	12,76 Па	7,2%
Δt_1	0,085 °C	3,8%
Δt_2	0,124 °C	12,4%

Здесь абсолютная и относительная погрешности определяются по формулам:

$$\varepsilon_{abs} = \max_{t_i=[0,T]} |y_{et}^\mu(t_i) - y_{int}^{\alpha,\mu}(t_i)|, \quad (3.16)$$

$$\varepsilon_{otn} = \max_{t_i=[0,T]} \left| \frac{y_{et}^\mu(t_i) - y_{int}^{\alpha,\mu}(t_i)}{y_{et}^\mu(t_i)} \right| \cdot 100\%. \quad (3.17)$$

В (3.16) и (3.17) y_{et}^μ – отклик эталонный модели на сигнал (3.15), $y_{int}^{\alpha,\mu}$ – отклик интегральной модели на сигнал (3.15) (α – амплитуда, на которую настраивались модели).

Графики откликов моделей, представленные на рисунках, демонстрируют адекватность построенных моделей в условиях заданных амплитудных возмущений. Таблицы погрешностей показывают, что абсолютные и относительные погрешности остаются в приемлемых пределах, что свидетельствует о надежности разработанных моделей.

Для повышения точности работы моделей была проведена оптимизация амплитуд входных возмущений на этапе идентификации для случая, когда на вход подается расход воды. По аналогии с [20] для входных сигналов вида

$$x(t) = \beta e(t), \quad \beta \in [0, B], \quad (3.18)$$

рассматривалась экстремальная задача следующего вида:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in [0, B]} \left\{ \max_{\beta \in [0, B]} |N(\alpha, \beta)| \right\}, \quad (3.19)$$

где α – амплитуда квадратичной модели, β – произвольная амплитуда, $N(\alpha, \beta) = \max_{t_i \in [0, 120]} (y_{et}^\beta(t_i) - y_{int}^{\alpha,\beta}(t_i))$ – невязка эталонной и интегральной моделей на возмущение (3.18). Вычисление невязки является принципиальным

отличием от статьи [20], авторы рассматривают невязку на конце отрезка моделирования. Однако для исследуемого случая оказывается, что необходимо вычислять максимальную невязку на всем отрезке моделирования и максимум не обязательно находится в конце отрезка. Такое вычисление невязки позволяет получить специфический вид невязки, качественно совпадающий с приведенным в [20]. И в силу этой специфики, будем искать решение (3.19) методом перебора. Графическая интерпретация данного решения представлена на Рисунке 3.9.

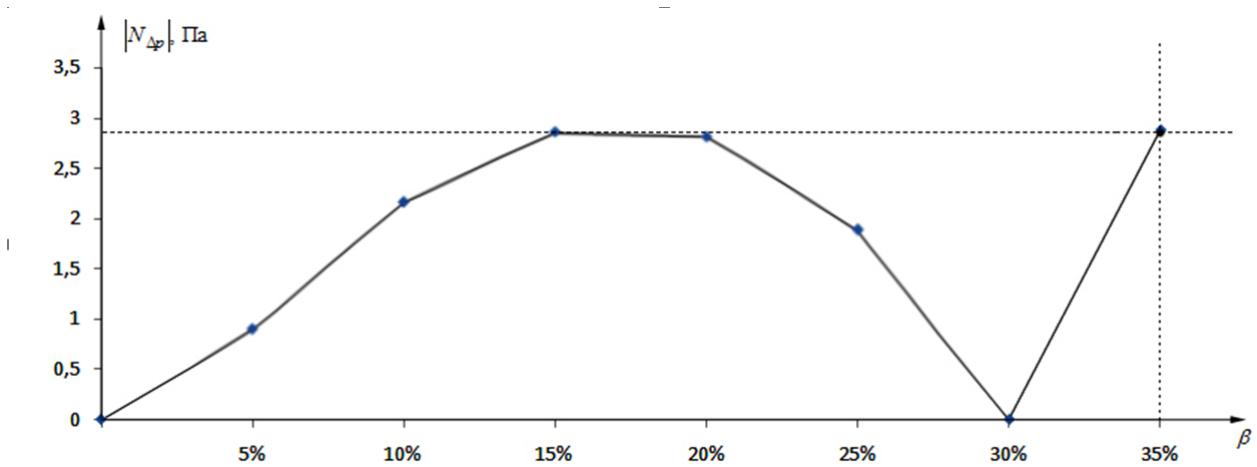


Рисунок 3.9 – График модуля невязки для модели динамики давления

Аналогичным образом были определены оптимальные значения амплитуд для температур воды соответственно в конденсаторе и ПНД для первого случая. Оценки данных параметров представлены в Таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Оптимальные значения амплитуд для моделей динамики давления и динамики температур в конденсаторе и ПНД соответственно

$\hat{\alpha}_p$	$0,86B$
$\hat{\alpha}_{t_1}$	$0,86B$
$\hat{\alpha}_{t_2}$	$0,87B$

Из таблицы видно, что полученные значения во всех трех случаях укладываются в диапазон $0,75B - 0,9B$, представленный в работе [20].

Далее определим границы точности интегральной модели в зависимости от величины возмущающего воздействия. В качестве допустимых входных

воздействий выберем возмущения вида

$$\Delta D_{w_1} = \beta e(t), \quad (3.20)$$

$$\Delta D_{w_2} = -\beta e(t), \quad (3.21)$$

где $\beta \in [0; 0,45]$. Были определены допустимые входные возмущения с относительной погрешностью, определяемой формулой (3.17). Ниже приведена таблица для допустимых значений $\underline{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta}$ с погрешностью $\varepsilon_{otn} \leq \varepsilon_{max}$ для давления (Таблица 3.4).

Таблица 3.4 – Допустимые значения β для давления

$\varepsilon_{max}, \%$	Допустимые значения		Допустимые значения	
	β для (3.20), %	$\bar{\beta}$	$\underline{\beta}$	$\bar{\beta}$
$\underline{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\underline{\beta}$	$\bar{\beta}$	
[-10, -8)	5	10	5	14
[-8, -4)	11	22	15	22
[-4, 0]	23	30	23	30
[0, 4]	30	35	30	35
(4, 8]	36	40	36	40
(8, 10]	41	44	41	43

Как можно заметить, наибольшая погрешность в данном случае достигается в начале и в конце отрезка $\beta \in [0; 0,45]$, а наименьшая – при приближении к значениям амплитуд, на которых восстанавливались ядра Вольтерра. Данная тенденция наблюдается в случае моделей, описывающих температуры в конденсаторе и ПНД.

Таким образом, для участка пароводяного тракта выполнена оптимизация амплитуд входных возмущений при решении задачи идентификации, для которой были определены оптимальные значения амплитуд в диапазоне $0,86B - 0,87B$. Установлены границы точности интегральной модели в зависимости от величины возмущающего воздействия, показано, что минимальная погрешность достигается при значениях амплитуд, близких к используемым при идентификации. Полученные оптимальные диапазоны амплитуд согласуются с данными натурных экспериментов, что подтверждает адекват-

ность проведённого моделирования и практическую применимость разработанной методики.

3.4. Выводы к третьей главе

В третьей главе проведен обзор современных программно-вычислительных комплексов для моделирования динамических систем, включая системы компьютерной математики, специализированные пакеты и универсальные среды визуального моделирования. Разработаны и модифицированы алгоритмы численного решения интегральных уравнений Вольтерра на основе методов средних прямоугольников, Рунге-Кутта и Product Integration для разного типа ядер, что расширило функциональные возможности ПВК «Динамика». Представлены блок-схемы алгоритмов, отражающие ключевые этапы вычислений. Проведена апробация методов на задаче моделирования динамики энергетической системы, включая идентификацию ядер Вольтерра и анализ точности моделей при различных входных воздействиях.

Выполнено сравнение двух подходов к решению задачи идентификации ядер Вольтерра для квадратичной модели. Первый использует тестовые сигналы кусочно-постоянного типа, второй – тестовые сигналы кусочно-линейного типа, что уточнило вклад линейного слагаемого в общий отклик модели. На примере эталонной системы показано, что при коротком фронте нарастания эффективны кусочно-постоянные сигналы, что согласуется с практикой в теплоэнергетике.

Для энергетического объекта проведена оптимизация амплитуды тестовых воздействий. Установлено, что точность модели максимальна при амплитудах в диапазоне $0,86B - 0,87B$. Точность модели снижается при отклонении возмущающих воздействий от этого оптимального значения.

Результаты данной главы опубликованы в работах [8; 127; 129].

Заключение

Ключевые результаты, представленные в диссертационной работе, являются оригинальными и обладают как теоретической, так и практической значимостью. В качестве основных результатов можно выделить следующие:

1. Разработан и теоретически обоснован новый подход к математическому моделированию нестационарной динамики сложных технических объектов. Подход основан на получении решения разностных аналогов для новых классов интегральных уравнений Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования. Доказаны теоремы о разрешимости соответствующих СЛАУ. Исследована сходимость разработанных устойчивых численных методов.
2. Предложены и исследованы модифицированные методы приближенного решения многомерных уравнений Вольтерра I рода, позволяющие идентифицировать несимметричные ядра с учетом запаздывания измерений входных сигналов. Данный подход был осуществлен с использованием модифицированного метода шагов.
3. Проведено исследование задачи восстановления векторного входного сигнала динамических объектов, описываемых нелинейными системами интегральных уравнений Вольтерра I рода с откликом, имеющим единый физический смысл. Доказаны теоремы разрешимости выделенных типов систем интегральных уравнений Вольтерра I рода с учетом размерности отклика динамического объекта. Для повышения устойчивости к погрешностям измерений применен фильтр на основе СКС, что позволило снизить погрешность восстановления входных сигналов на 3–5%, а выходных – на 5–8%.
4. Создано и апробировано программное обеспечение, реализующее разработанные алгоритмы в виде модулей для ПВК «Динамика». Проведенный анализ областей применимости и вычислительные эксперименты на реальных данных Назаровской ГРЭС позволили выделить оптимальные параметры использования методов (например, оптимальный шаг сетки, найденный методом Фибоначчи, и диапазон амплитуд тестовых воздействий для улучшения

точности модели).

5. Проведена апробация разработанных методик и программного обеспечения в задаче моделирования нелинейной динамики теплотехнического оборудования. Показана эффективность предложенного подхода для моделирования динамики изменения энталпии, температуры и давления в пароводяному тракте крупного энергетического объекта. Сравнительный анализ двух подходов (с кусочно-постоянными и кусочно-линейными тестовыми сигналами) позволил дать рекомендации по их применению в зависимости от характера входных воздействий.

Перечень сокращений и обозначений

- t – текущее время (с);
 ν – временной параметр (с);
 z – осевая координата (м);
 q – тепловая нагрузка (кВт/м);
 g – масса (кг/м);
 h – поверхность теплообмена (м);
 i^* – энталпия (кДж/кг);
 \mathbf{t}_B , θ – температура потока и стенки (К);
 c – удельная теплоемкость (кДж/(кг·К));
 κ – коэффициент теплопередачи (кВт/(м²·К));
 Q – полная тепловая нагрузка (кВт);
 G – полная масса (кг);
 H – полная поверхность теплообмена (м²);
 D – расход вещества (кг/с);
 l – длина рассматриваемого участка (м);
 \mathbf{p} – давление (Н/м²);
 \mathbf{t} – температура;
 \mathcal{D} – термический деаэратор;
ПЭН – система питательных электронасосов;
ППК-1, ППК-2 – прямоточные паровые котлы;
ЦВД – цилиндр высокого давления;
ЦСД – цилиндр среднего давления;
ЦНД – цилиндр низкого давления;
БС – бойлерная система;
К – конденсатор;
КЭН – система конденсатных электронасосов;
ПНД – подогреватели низкого давления;
ПВД – подогреватели высокого давления.

Список литературы

1. Алифанов, О.М. Обратные задачи теплообмена / О.М. Алифанов – М. : Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. Антипина, Е.Д. Дискретизационный метод решения интегрального уравнения I рода типа Вольтерра / Е. Д. Антипина // Материалы Междунар. конф. «Теория оптимального управления и приложения» (ОСТА 2022). – Екатеринбург : ИММ УрО РАН. – 2022. – С. 12–15.
3. Антипина, Е. Д. Идентификация несимметричного ядра Вольтерра на базе метода средних прямоугольников и метода product integration / Е.Д. Антипина, С.В. Солодуша // Динамические системы и компьютерные науки : теория и приложения (DYSC 2022) : Материалы 4-й Междунар. конф., 19–22 сентября 2022 г. – Иркутск : ИГУ. – 2022. – С. 8–10.
4. Антипина, Е.Д. Идентификация интегральных моделей нелинейной динамики на зашумленных данных методом интегрирования произведения / Е.Д. Антипина, С.В. Солодуша, В.А. Спиряев // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО'23) : Материалы VII Междунар. конф., 26 июня – 1 июля 2023 г. – Улан-Удэ : ВСГУТУ. – 2023. – С. 15–17.
5. Антипина, Е.Д. Идентификация ядер Вольтерра в интегральных моделях динамических систем / Е.Д. Антипина // Неустойчивые задачи вычислительной математики : Материалы семинара с междунар. уч. им. А.С. Апарцина, 29 июля – 02 августа 2024 г. Иркутск : ИГУ. – 2024. – С. 11–13.
6. Антипина, Е.Д. К задаче идентификации несимметричных ядер Вольтерра / Е.Д. Антипина, С.В. Солодуша // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО'20) : Материалы VII Междунар. конф., 07–12 сентября 2020 г. – Улан-Удэ : ВСГУТУ. – 2020. – С. 17–19.
7. Антипина, Е.Д. Математическое моделирование, численный анализ и приближенные методы / Е.Д. Антипина // Сб. материалов Междунар.

- конф. «XXXIII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2022). – Симферополь : Ариал. – 2022. – С. 42.
8. Антипина, Е.Д. Моделирование нелинейных динамических систем с векторным входом и приложение к теплоэнергетическим объектам / Е.Д. Антипина, Э.А. Таиров // Тез. Междунар. конф., 07–11 сентября 2020 г. – Иркутск : ИСЭМ СО РАН. – 2020. – С. 56.
9. Антипина, Е.Д. Некоторый класс интегральных уравнений I рода в задаче идентификации ядер Вольтерра / Е. Д. Антипина // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем (МКМ-2024) : Сб. статей по материалам XVIII Всерос. с междунар. уч. научно-технической конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов, 04–07 июня 2024 г. – Пенза : ПГУ. – 2024. – С. 73–79.
10. Антипина, Е.Д. Об устойчивом алгоритме решения одного класса двумерных интегральных уравнений Вольтерра I рода / Е.Д. Антипина, С.В. Солодуша // Тез. докл. Междунар. (51-ой Всерос.) мол. школы-конф. Со-ПроМат, 3–7 февраля 2020 г. – Екатеринбург : ИММ УрО РАН. – 2020. – С. 46.
11. Антипина, Е.Д. Формулы обращения и их конечномерные аналоги для многомерных уравнений Вольтерра I рода / Е.Д. Антипина, С.В. Солодуша // Марчуковские научные чтения (МНЧ-2020), 19–23 октября 2020 г. – Новосибирск. – 2020. – С. 4.
12. Антипина, Е.Д. Формулы обращения для одного класса трехмерных уравнений Вольтерра I рода / Е.Д. Антипина // Динамические системы и компьютерные науки : теория и приложения (DYSC 2021) : Материалы 3-й Междунар. конф., 13–17 сентября 2021 г. – Иркутск : ИГУ. – 2021. – С. 9–11.
13. Антипина, Е.Д. Формулы обращения для трехмерного интегрального уравнения Вольтерра I рода с предысторией / Е.Д. Антипина // Изв. ИГУ. Серия Математика. – 2022. – Т. 41. – С. 69–84.

14. Антипина, Е.Д. Численное решение двумерного интегрального уравнения Вольтерра I рода относительно несимметричного ядра методом Рунге-Кутта / Е.Д. Антипина // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020617244. ФГБУН ИСЭМ СО РАН. – № 2020616207; заявл. 15.06.2020; опубл. 02.07.2020.
15. Антипина, Е.Д. Численное решение одномерного интегрального уравнения в задаче идентификации ядер Вольтерра на базе кусочно-линейных тестовых сигналов / Е.Д. Антипина // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022618264. ФГБУН ИСЭМ СО РАН. – № 2022617714; заявл. 28.04.2022; опубл. 05.05.2022.
16. Апарцин, А.С. Некоторые оценки решений интегральных неравенств, возникающих при идентификации моделей развивающихся систем В.М. Глушкина / А.С. Апарцин, И.Д. Гусева // Науч. отчёт. – Иркутск : СЭИ СО АН СССР, 1993. – С. 42–61.
17. Апарцин, А.С. О новых классах линейных многомерных уравнений I рода типа Вольтерра / А.С. Апарцин // Изв. ВУЗов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 28–41.
18. Апарцин, А.С. О повышении точности моделирования нелинейных динамических систем полиномами Вольтерра / А.С. Апарцин // Электронное моделирование. – 2001. – Т. 23, № 6. – С. 3–12.
19. Апарцин, А.С. О решении многомерных уравнений Вольтерра I рода, возникающих в задаче идентификации нелинейных динамических систем / А.С. Апарцин // Методы оптимизации и их приложения. – Иркутск : СЭИ СО РАН, 1992. – С. 219–222.
20. Апарцин, А.С. Об оптимизации амплитуд тестовых сигналов при идентификации ядер Вольтерра / А.С. Апарцин, С.В. Солодуша // Автом. и телемех. – 2004. – № 3. – С. 116–124.
21. Апарцин, А.С. Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта / А. С. Апарцин // Тр. ИММ УрО РАН. – 2012. – Т. 18. – №1. – С. 69–81.

22. Апарцин, А.С. Построение интегральных динамических моделей теплообменников и их исследование на высокотемпературном контуре / А.С. Апарцин, Э.А. Таиров // Изв. РАН. Энергетика. – 1996. – №3. – С. 85–97.
23. Апарцин, А.С. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм / А.С. Апарцин, А.Б. Бакушинский // Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск : Иркут. гос. ун-т. – 1972, вып. 1. – С. 248–258.
24. Апарцин, А.С. Применение интегро-степенных рядов Вольтерра к моделированию динамики теплообменников / А.С. Апарцин, Э.А. Таиров, С.В. Солодуша, Д.В. Худяков // Изв. РАН. Энергетика. – 1994. – № 3. – С. 138–145.
25. Апарцин, А.С. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем / А.С. Апарцин, И.В. Сидлер // Автомат. и телемех. – 2013. – Вып. 6. – С. 3–16.
26. Апарцин, А.С. Теоремы существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода, связанных с идентификацией нелинейных динамических систем (скалярный случай). Препринт № 9 / А.С. Апарцин. – Иркутск : СЭИ СО РАН, 1995. – 30 с.
27. Апарцин, А.С. Теоремы существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода, связанных с идентификацией нелинейных динамических систем (векторный случай). Препринт № 8 / А.С. Апарцин. – Иркутск : СЭИ СО РАН, 1996. – 60 с.
28. Башарин, С.А. Моделирование и анализ нелинейных электрических цепей / С.А. Башарин, Е. Б. Соловьева. – СПб. : СПбГЭТУ ЛЭТИ, 1999. – 75 с.
29. Бахтадзе, Н.Н. Интеллектуальные алгоритмы идентификации состояния энергообъектов / Н.Н. Бахтадзе [и др.] // Инф. техн. и вычислительные системы. – 2011. – № 3. – С. 45–50.

30. Бахтадзе, Н.Н. Сценарное прогнозирование на основе цифровых смарт-моделей динамических процессов / Н.Н. Бахтадзе, А. А. Черешко, В.Н. Кушнарев // Инф. техн. и вычислительные системы. – 2023. – № 3. – С. 70–78.
31. Боева, В.А. Непараметрическая элементов системы идентификация терморегулирования / В.А. Боева, Ю.Е. Воскобойников, Р.Ш. Мансуров // Системы анализа и обработки данных. – 2021. – Т. 81, № 1. – С. 7–20.
32. Бойков, И.В. Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений теории развивающихся систем / И.В. Бойков, А.Н. Тында // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 9. – С. 1214–1223.
33. Ботороева, М.Н. Приложения и методы численного решения одного класса интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования / М.Н. Ботороева, М.В. Булатов // Изв. Ирк. гос. унта. Серия Математика – 2017. – Т. 20. – С. 3–16.
34. Булатов, М.В. Коллокационно-вариационные подходы к решению интегральных уравнений Вольтерра I рода / М.В. Булатов, Е.В. Маркова // ЖВМиМФ. – 2022. – Т. 62, № 1. – С. 105–112.
35. Булатов, М.В. Методы типа Адамса для решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, Д.Т. Тхань // Вестник ЮУрГУ. Серия Матем. моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, вып 3. – С. 93–106.
36. Булатов, М.В. Об устойчивых алгоритмах численного решения интегро-алгебраических уравнений / М.В. Булатов, О.С. Будникова // Вестник ЮУрГУ. Серия Матем. моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6. – № 4. – С. 5–14.
37. Булатов, Ю.Н. Применение технологий цифровых двойников в энергетике / Ю.Н. Булатов, К.Е. Короткова // Тр. БГУ. Серия Естественные и инженерные науки. – 2021. – Т. 1. – С. 103–112.
38. Бураков, М.В. Структурная идентификация нечеткой модели / М.В. Бураков, М.С. Брунов // Тр. СПИИРАН. – 2014. – Вып. 34. – С. 232–246.

39. Бухгейм, А.Л. Введение в теорию обратных задач / А.Л. Бухгейм – Новосибирск : Наука. – 1988. – 181 с.
40. Бухгейм, А.Л. Единственность в целом одного класса многомерных обратных задач / А.Л. Бухгейм, М.В. Клибанов // Докл. АН СССР. – 1981. – Т.260, /No 2. – С. 269–271.
41. Бухгейм, А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи / А.Л. Бухгейм – Новосибирск : Наука. – 1983. – 207 с.
42. Ван-Трис, Г.Л. Синтез оптимальных нелинейных систем управления / Г.Л. Ван-Трис.– М. : Мир, 1964.– 167 с.
43. Васин, В. В. Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Агеев // Екатеринбург : НАУКА, 1993. – 263 с.
44. Васин, В. В. основы теории некорректных задач / В.В. Васин – Новосибирск : СО РАН, 2020. – 313 с.
45. Веников, В.А. Кибернетические модели электрических систем / В.А. Веников, О.А. Суханов. – М. : Энергоиздат, 1982. – 327 с.
46. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения : методы, алгоритмы, программы : справ. пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев : «Наукова думка», 1986. – 544 с.
47. Волков, Н.В. Функциональные ряды в задачах динамики автоматизированных систем / Н.В. Волков. – М. : Янус-К, 2001. – 100 с.
48. Вольтерра, В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтерра. – М. : Наука, 1982. – 302 с.
49. Воскобойников, Ю.Е. Задача и алгоритм непараметрической идентификации линейной нестационарной динамической системы с помощью кубических сплайнов / Ю.Е. Воскобойников, С.В. Солодуша // Современные научноемкие технологии. – 2023. – № 10. – С. 18–25.

50. Воскобойников, Ю.Е. Идентификация квадратичного ядра уравнения Вольтерра для моделирования нелинейных динамических систем / Ю.Е. Воскобойников, В.А. Боева // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – Т. 85, № 1. – С. 25–40.
51. Воскобойников, Ю.Е. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике / Ю.Е. Воскобойников, Н.Г. Преображенский, А.И. Седельников – Новосибирск : Наука, 1984. – 238 с.
52. Воскобойников, Ю.Е. Непараметрическая идентификация линейных стационарных динамических систем при прямоугольном входном сигнале / Ю.Е. Воскобойников, В. А. Боева, Е. Д. Антипина // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022682577. ФГБУН ИСЭМ СО РАН. – № 2022682044; заявл. 17.11.2022; опубл. 24.11.2022.
53. Воскобойников, Ю.Е. Устойчивый алгоритм вычисления смешанных производных в задачах непараметрической идентификации нелинейных систем / Ю.Е. Воскобойников, В.А. Боева // Современные наукоемкие технологии. – 2021. – № 4. – С. 25–29.
54. Воскобойников, Ю.Е. Устойчивые алгоритмы непараметрической идентификации динамических систем : моногр. / Ю.Е. Воскобойников. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2019. – 156 с.
55. Воропай, А.В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин / А. В. Воропай – Харьков : Издательство «Лидер». – 2018. – 212 с.
56. Глушков, В.М. Моделирование развивающихся систем / В.М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко. – М. : Наука, 1983. – 350 с.
57. Гроп, Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М. : Мир, 1979. – 302 с.
58. Даева, С.Г. О численном решении краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца методом гиперсингулярных интегральных уравнений / С.Г. Даева, А.В. Сетуха // Вычислительные методы и программирование. – 2015. – Т. 16, вып. 3. – С. 421–435.

59. Дейч, А.М. Методы идентификации динамических объектов / А.М. Дейч. – М. : Энергия, 1979. – 240 с.
60. Денисов, А.М. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода / А.М. Денисов // ЖВМ и МФ. – 1975. – Т. 15, № 4. – С. 1053–1056.
61. Зотеев, В.Е. Параметрическая идентификация математических моделей в форме дробнорациональных зависимостей на основе разностных уравнений / В.Е. Зотеев, М.А. Романюк // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. – 2012. – Вып. 3. – С. 102–113.
62. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М. : Наука, 1978. – 206 с.
63. Иванов, В.К. О линейных некорректных задачах / В.К. Иванов // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 145, № 2. – С. 270–272.
64. Иманалиев, М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода / М.И. Иманалиев, А. Асанов // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 309, № 5. – С. 1052–1055.
65. Информационная технология диагностирования состояний электродвигателей на основе моделей Вольтерра / С. Н. Григоренко [и др.] // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2014. – Т. 4, № 11. – С. 38–43.
66. Капалин, В.И. Некорректные задачи и непараметрическая идентификация систем управления / В.И. Капалин // Экономика. Информатика. – 2009. – Т. 12-1, № 15(70). – С. 130–137.
67. Карпова, В.М. Разработка адаптивного фильтра для цифровых систем передачи видеинформации / В. М. Карпова // Наука и общество. – 2012. – № 5. – С. 16–19.
68. Комиссарова, Н.В. Примеры неединственности решения интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода / Н.В. Комиссарова, О.Н. Чащин // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. – № 2(18). – С. 13–22.

69. Краснощеков, П.С. Принципы построения моделей / П.С. Краснощеков, А.А. Петров – М. : МГУ, 1983. – 264 с.
70. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов : учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер [и др.] /– М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 479 с.
71. Лаврентьев, М.М. Линейные операторы и некорректные задачи / М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. – М. : Наука, 1991. – 331 с.
72. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М. : Наука, 1980. – 285 с.
73. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах и математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : СО АН СССР, 1962. – 92 с.
74. Лаврентьев, М.М. Об интегральных уравнениях первого рода / М.М. Лаврентьев // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 31–33.
75. Магницкий, Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода / Н.А. Магницкий // ЖВМ и МФ. – 1979. – Т. 19, № 4. – С. 970–989.
76. Масаева, О.Х. Задача Неймана для обобщенного уравнения Лапласа / О.Х. Масаева // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2018. – № 3(23). – С. 83–90.
77. Масри, М.М. Построение аппроксимационной модели Вольтерра нелинейной системы с помощью многоступенчатых тестовых сигналов / М.М. Масри, С.В. Павленко, В.Д. Павленко // Информатика и математические методы в моделирования. – 2015. – Т. 5, № 2. – С. 142–151.
78. Методы исследования и управления системами энергетики / отв. ред. А.П. Меренков, Ю.Н. Руденко. – Новосибирск : Наука, 1987. – 369 с.
79. Мухамедов, А.М. Непараметрическая идентификация движений глаз спортсменов-борцов с применением дифференциальной нейронной сети / А.М. Мухамедов, С.В. Леонов, И.С. Поликанова [и др.] // Российский журнал биомеханики. – 2023. – Т. 27, № 2. – С. 75–84.

80. Мышкис, А.Д. Элементы теории математических моделей / А.Д. Мышкис. – М. : КомКнига, 2007. – 192 с.
81. Новиков, С.П. Практическая идентификация динамических характеристик объектов управления теплоэнергетического оборудования / С.П. Новиков. – Новосибирск : НГТУ, 2004. – 64 с.
82. Павленко, В.Д. Идентификация нелинейных динамических систем в виде ядер Вольтерры на основе данных измерений импульсных откликов / В.Д. Павленко // Электронное моделирование. – 2010. – Т. 32. – № 3. – С. 3–18.
83. Павленко, В.Д. Методы детерминированной идентификации нелинейных систем в виде моделей Вольтерра / В.Д. Павленко, С.В. Павленко // XII Всеросс. совещание по проблемам управления ВСПУ –2014. – М. : ИПУ РАН, 2014. – С. 2830–2842.
84. Павленко, С.В. Построение информационной модели фотосинтетического реакционного центра в виде ядер Вольтерра / С.В. Павленко, В.Д. Павленко // Матер. XI Междунар. науч.-техн. конф. «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем (АЧМ-2016)». – Пенза : ПГУ, 2016. – С. 100–104.
85. Попков, Ю.С. Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем / Ю.С. Попков, О.Н. Киселев, Н.Г. Петров, Б.Л. Шмульян. – М. : Энергия, 1976. – 440 с.
86. Применение интегро-степенных рядов Вольтерра к моделированию динамики теплообменников / А.С. Апарчин [и др.] // Изв. РАН. Энергетика. – 1994. – № 3. – С. 28–42.
87. Пупков, К.А. Анализ и расчет нелинейных систем с помощью функциональных степенных рядов / К.А. Пупков, Н.А. Шмыкова. – М. : Машиностроение, 1982. – 150 с.
88. Пупков, К.А. Функциональные ряды в теории нелинейных систем / К.А. Пупков, В.И. Капалин, А.С. Ющенко. – М. : Наука, 1976. – 448 с.

89. Райбман, Н.С. Что такое идентификация / Н.С. Райбман. – М. : Наука, 1970. – 117 с.
90. Рубашкин, А.С. Развитие технологии моделирования динамических процессов на тепловых электростанциях / А.С. Рубашкин, В.А. Рубашкин // Теплоэнергетика. – 2004. – № 10. – С. 40–43.
91. Рубашкин, А.С. Методы моделирования технологических процессов, происходящих в энергетическом оборудовании / А.С. Рубашкин, В.Л. Вербицкий, В.А. Рубашкин // Теплоэнергетика. – 2003. – № 8. – С. 44–48.
92. Серов, Е.П. Динамика парогенераторов / Е.П. Серов, Б. А. Корольков. – М. : Энергия, 1972. – 416 с.
93. Сидоров, Д.Н. Методы анализа интегральных динамических моделей : теория и приложения / Д.Н. Сидоров. – Иркутск : ИГУ, 2013. – 293 с.
94. Сидоров, Д.Н. Моделирование нелинейных динамических систем рядами Вольтерра (идентификация и приложения) : дисс. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.16 / Сидоров Денис Николаевич. – Иркутск : ИГУ, 1999. – 150 с.
95. Сидоров, И.Г. Минимаксный адаптивный алгоритм фильтрации нелинейных систем рядами Вольтерра второго порядка / И.Г. Сидоров // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия : Инженерные исследования. – 2022. – Т. 23, № 3. – С. 198–206.
96. Сидоров, Н.А. Об обобщенных решениях интегральных уравнений в задаче идентификации нелинейных динамических моделей / Н.А. Сидоров, Д.Н. Сидоров // Автомат. и телемех. – 2009. – № 4. – С. 41–47.
97. Сизиков, В.С. Применение метода интегрального уравнения в задаче углового разрешения сигналов / В.С. Сизиков // Вопр. Судостроения. Серия Общетехн. – 1981. – Вып. 60. – С. 34–38.
98. Смирнов, Ю.Г. Метод интегральных уравнений для решения задачи Дирихле в возмущенном трехмерном слое / Ю.Г. Смирнов, А.А. Щербаков, А.В. Цветков // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. – 2012. – № 1. – С. 92–102.

99. Солодуша, С. В. Идентификация несимметричного ядра Вольтерра на базе метода Product Integration / С.В. Солодуша, Е.Д. Антипина // Неустойчивые задачи вычислительной математики : тез. докл. семинара с междунар. уч., 15–19 августа 2022 г. – Иркутск : ИГУ, 2022. – С. 27–28.
100. Солодуша, С.В. К идентификации ядер Вольтерра в интегральных моделях линейных нестационарных динамических систем / С.В. Солодуша, Е.Д. Антипина // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН. – 2023. – Т. 224. – С. 125–132.
101. Солодуша, С.В. Квадратичные и кубичные полиномы Вольтерра : идентификация и приложение / С.В. Солодуша // Вестник СПб. ун-та. Прикл. матем. Информ. Процессы управления. –2018. – Т. 14. – № 2. – С. 131–144.
102. Солодуша, С.В. Методы построения интегральных моделей динамических систем : алгоритмы и приложения в энергетике : дис. ... докт. техн. наук : 05.13.18 / С.В. Солодуша; ИСЭМ СО РАН. – Иркутск, 2019. – 353 с.
103. Солодуша, С.В. Моделирование систем автоматического управления на основе полиномов Вольтерра / С.В. Солодуша // МАИС. – 2012. – Т. 19, № 1. – С. 60–68.
104. Солодуша, С.В. О некоторых свойствах нелинейных интегральных моделей динамических процессов / С.В. Солодуша, Е.Д. Антипина // Информационные техн. и вычислительные системы. – 2024. – № 2. – С. 92–99.
105. Солодуша, С.В. Пакет «Динамика» для исследования динамических процессов рядами Вольтерра / С.В. Солодуша // Вестник ЮУрГУ. Серия : Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2017. – Т. 17, № 2. – С. 83–92.
106. Солодуша, С.В. Применение кубичного полинома Вольтерра к моделированию динамики теплообмена / С.В. Солодуша, В.А. Спиряев, М.С. Щербинин // Вестник ИрГТУ. – 2006. – Т. 3, № 2(26). – С. 150–155.
107. Солодуша, С.В. Программный комплекс для моделирования систем тепло- и электроэнергетики / С. В. Солодуша // Системы проектиро-

- вания, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM – 2016) : тр. XVI-ой Междунар. молодёжной конф., 17–19 октября 2016 г. – М. : ООО «Аналитик», 2016. – С. 314–318.
108. Спириев, В.А. Применение тестовых уравнений вольтерровского типа уравнений для идентификации входных сигналов / В.А. Спириев, С.В. Солодуша // Управление большими системами : сборник трудов. – 2022. – № 96. – С. 5–15.
109. Таиров, Э.А. Интегральная модель нелинейной динамики парогенерирующего канала на основе аналитических решений / Э.А. Таиров, В.В. Запов // Вопросы атомн. науки и техн. Серия «Физика ядерных реакторов». – 1991. – Вып. 3. – С. 14–20.
110. Таиров, Э.А. Математическая модель, численные методы и программное обеспечение тренажера для энергоблока Иркутской ТЭЦ-10 / Э.А. Таиров, А.А. Логинов, В.Ф. Чистяков. – Иркутск : СЭИ СО РАН, 1999. – Препринт № 11. – 43 с.
111. Таиров, Э.А. Методы комплексного исследования динамики энергетических установок и их элементов : дис. ... докт. техн. наук : 05.14.01 / Таиров Э.А. – Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2000. – 356 с.
112. Таиров, Э.А. Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным теплоносителем / Э. А. Таиров // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1989. – № 1. – С. 150–156.
113. Таиров, Э.А. Развитие методов моделирования динамики теплоэнергетических установок / Э.А. Таиров, А.А. Левин, В.В. Запов // Вестник ИрГТУ. – 2011. – № 3(50). – С. 117–123.
114. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1986. – 285 с.
115. Тихонов, А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.

116. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 2013. – 798 с.
117. Тихонов, А.Н. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов. – М. : Наука, 1990. – 231 с.
118. Тында, А.Н. Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами / А.Н. Тында // Журнал СВМО. – 2023. – Т. 25, № 1. – С. 565–577.
119. Тында, А.Н. Применение метода граничных интегральных уравнений к численному решению эллиптических краевых задач в \mathbb{R}^3 / А.Н. Тында, К.А. Тимошенков // Журнал СВМО. – 2020. – Т. 22, № 3. – С. 319–332.
120. Тында, А.Н. Численное моделирование динамических процессов в задаче передачи давления от артерии в окклюзионную манжету / А.Н. Тында, С.И. Геращенко, М.С. Геращенко, А.А. Пивкина // Изв. высших учебных заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. – 2024. – № 4(72). – С. 91–104.
121. Халилов, Э.Г. Исследование приближенного решения интегрального уравнения, соответствующего смешанной краевой задаче для уравнения Лапласа / Э.Г. Халилов, М.Н. Бахшалыева // Уфимск. матем. журн. – 2021. – Т. 13, вып. 1. – С. 86–98.
122. Флейк, Р.Г. Теория рядов Вольтерра и ее приложение к нелинейным системам с переменными параметрами / Р.Г. Флейк // Оптимальные системы. Статистические методы. Тр. II Междунар. конгресса. Базель, 1963. – М. : Наука, 1965. – С. 453–468.
123. Фомин, А.А. Метод и информационная технология построения непараметрической динамической модели глазодвигательного аппарата / А.А. Фомин [и др.] // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2015. – № 2/9(74). – С. 64–69.

124. Фомин, А.А. Метод построения многомерной модели Вольтерра глазодвигательного аппарата / А. А. Фомин, В.Д. Павленко, А.Н. Фёдорова // Электротех. и комп. системы – 2015. – № 19(95). – С. 296–301.
125. Яценко, Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью / Ю. П. Яценко // АН УССР, Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова. Киев : Наук. думка, 1991. – 217 с.
126. Andersson, M.A. An Accurate Empirical Model Based on Volterra Series for FET Power Detectors / M.A. Andersson, J. Stake // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2016. – Vol. 64, № 5. – P. 1431–1441.
127. Antipina, E.D. Application of a Volterra quadratic polynomial to modeling elements of heat engineering devices / E.D. Antipina, V.A. Spiryaev, E.A. Tairov // E3S Web of Conf. – 2019. – Vol. 114. – P. 01007.
128. Antipina, E.D. Numerical solution the Volterra dual integral equation of the first kind based on a method of Runge-Kutta type / E.D. Antipina // 2020 IOP Conf. Ser. : Mater. Sci. Eng. XIII International Scientific Conference Architecture and Construction 2020. Novosibirsk, 22-24 September 2020. – 2020. – Vol. 953. – P. 012064.
129. Antipina, E.D. On one approach to computer modeling of the dynamics of heat and power systems by the Volterra series method / E.D. Antipina, E.V. Markova, S.V. Solodusha // AIP Conf. Proc. Computer Science and Information Technologies CSIT 2021, Yerevan, 27 September – 1 October 2021 – 2021. – Vol. 2757(1). – P. 060001.
130. Antipina, E.D. Studying the complexity of identification of Volterra kernels for the case of a vector input signal of arbitrary dimension / E.D. Antipina, E.V. Markova, E.A. Tairov // E3S Web of Conf. ENERGY-21 – Sustainable Development and Smart Management : electronic edition. – 2020. – P. 03004.
131. Apartsyn, A.S. Nonclassical Volterra Integral Equations of the First Kind : Theory and Numerical Methods / A.S. Apartsyn. – VSP, Utrecht-Boston, 2003. – 168 p.

132. Apartsyn, A.S. Mathematical modeling the dynamic systems and objects with the help of the Volterra integral series / A.S. Apartsyn // EPRI-SEI Joint seminar of methods for solving the problems on energy power systems development and control. – Beijing, China : EPRI, 1991. – P. 117–132.
133. Apartsyn, A.S. Multilinear Volterra Equations of the First Kind / A.S. Apartsyn // Automation and Remote Control – 2004. – № 65. – C. 263–269.
134. Asanov, A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind / A. Asanov // Utrecht : VSP. – 1998. – 276 p.
135. Balajewicz, M. On the Application of Multi-Input Volterra Theory to Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom Aerodynamic Systems / M. Balajewicz, F. Nitzsche, D. Feszty // AIAA Journal. – 2010. – Vol. 48, № 1. – P. 56–62.
136. Banks, H.T. Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems / H.T. Banks, K. Kunisch // Boston : Birkhäuser, 1989. – 290 p.
137. Beilina, L. Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems / L. Beilina, M. V. Klibanov // Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. – 2012. – 407 p.
138. Belbas, S.A. Numerical solution of multiple nonlinear Volterra integral equations / S.A. Belbas, Yu. Bulka // Applied Mathematics and Computation. – 2011. – Vol. 217. – P. 4791–4804.
139. Brunton, S.L. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems / S.L. Brunton, J.L. Proctor, J.N. Kutz // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2016. – Vol. 113, №. 15. – P. 3932–3937.
140. Chan, S.C.K. Adaptive Weighted Least Squares Algorithm for Volterra Signal Modeling / S.C.K. Chan, T. Stathaki, A.G. Constantinides // IEEE Transactions on circuits and systems. Fundamental theory and applications. – 2000. – Vol. 47, № 4. – P. 545–554.

141. de Hoog, F. On the solution of Volterra integral equations of the first kind
Numer / F. de Hoog, R. Weiss // Math. – Vol. 21, № 1. – 1973. – P. 22–32.
142. Fomin, O. Intelligent technology of nonlinear dynamics diagnostics using
Volterra kernels moments / O. Fomin, M. Masri, V. Pavlenko // Int. Journal
of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2016. – Vol. 10. –
P. 158–165.
143. Fomin, O. Method of building an intelligent computing systems for
diagnostics using Volterra kernels moments / O. Fomin, M. Masri,
V. Pavlenko // Proc. of the 9th Intern. Conf. on Computer Engineering and
Applications (CEA 15). Recent Advances in Computer Engineering Series. –
Dubai, U.A.E., 2015. – P. 52–56.
144. Franz, M.O. A unifying view of Wiener and Volterra theory and polynomial
kernel regression / M.O. Franz, B. Scholkopf // Neural computation. – 2006. –
Vol. 18, №. 12. – P. 3097–3118.
145. Gear, C.W. Differential-algebraic equations, indices, and integral algebraic
equations / C.W. Gear // SIAM J. on Numer. Anal. – 1990. – Vol. 27. –
№ 6. – P. 1527–1534.
146. Greblicki, W. Nonparametric system identification / W. Greblicki,
M. Pawlak. – Cambridge University Press, 2008. – 400 p.
147. Hoerr, E. Using Volterra Series Modeling Techniques to Classify Black-
Box Audio Effects / E. Hoerr, R.C. Maher // Audio Engineering Society
Convention. – 2019. – Vol. 147. – P. 10225(8).
148. Lamm, P.K. Approximation of ill-posed Volterra problems via predictor-
corrector regularization methods / P.K. Lamm // SIAM J. Appl. Math. –
1996. – Vol. 56, № 2. – P. 524–541.
149. Linz, P. Product integration method for Volterra integral equations of the
first kind / P. Linz // BIT. – 1971. – № 3. – P. 413–421.
150. Ljung, L. System Identification : Theory for the User. 2nd ed. / L. Ljung //
Prentice Hall, 1999. – 609 p.

151. Maine, R.E. Identification of Dynamic Systems : Theory and Formulation / R.E. Maine, K.W. Iliif. – NASA STI. USA, 1985. – 185 p.
152. Marmarelis, V.Z. Identification of nonlinear biological systems using laguerre expansions of kernels / V.Z. Marmarelis // Annals of Biomed. Eng. –1993. – Vol. 21. – P. 573–589.
153. Novak, A. Identification of Nonlinear Systems : Volterra Series Simplification / A. Novak // Acta Polytechnica. – 2007. – Vol. 47, №4–5. – P. 72–75.
154. Raissi, M. Machine learning of linear differential equations using Gaussian processes / M. Raissi, P. Perdikaris, G.E. Karniadakis // J. Comput. Phys. – 2017. – Vol. 348. – P. 683–693.
155. Rezghi, M. A new variant of L-curve for Tikhonov regularization / M. Rezghi, S.M. Hosseini // J. Comput. Appl. Math. – 2012. – Vol. 231, № 5. – P. 914–924.
156. Solodusha, S.V. MIMO Volterra Models for Linear Automatic Control Systems / S.V. Solodusha, E.D. Antipina // 2023 Int. Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi. Publisher : IEEE. – 2023. – P. 117–121.
157. Solodusha, S.V. Modeling Heat Exchangers by Quadratic Volterra Polynomials / S.V. Solodusha // Automation and Remote Control. 2014. – Vol. 75, № 1. – P. 87–94.
158. Solodusha, S.V. New Classes of Volterra Integral Equations of the First Kind Related to the Modeling of the Wind Turbine Dynamics / S.V. Solodusha // Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). Proc. 2020 15th Int. Conf. Moscow, June 03–05. IEEE. – 2020. – P. 1–3.
159. Solodusha, S. Inversion formulas and their finite-dimensional analogs for multidimensional Volterra equations of the first kind / S. Solodusha, E. Antipina // J. Phys. Conf. Ser. – 2021. – Vol. 1715. – P. 012046.
160. Solodusha, S.V. Identification of Integral Models of Nonlinear Dynamics by the Product Integration Method with Digital Signal Processing / S.V.

- Solodusha, V.A. Spiryaev, E.D. Antipina // 2023 Int. Conf. on Ind. Eng., Applications and Manufacturing (ICIEAM), Publisher : IEEE. – 2023. – P. 1064–1068.
161. Solodusha, S.V. On a System of Linear Volterra Integral Equations with Variable Integration Limits / S.V. Solodusha // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. – Vol. 44, № 3. – P. 1229–1235.
162. Solodusha, S.V. To Identification of Integral Models of Nonlinear o Multi-Input Dynamic Systems Using the Product Integration Method / S.V. Solodusha // Proc. IV Stability and Control Processes Conf. in memory of Prof. Vladimir Zubov (Saint Petersburg, Russia, 5–9 October 2020). Saint Petersburg; 2022. – P. 137–147.
163. Markova, E. Integral models based on Volterra equations with prehistory and their applications in energy / E. Markova, I. Sidler, S. Solodusha // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, № 10. – P. 1127.
164. Tynda, A.N. Numerical Simulation of Blood Flow in a Blood Vessel / A.N. Tynda, A.A. Pivkina // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2024. – Vol. 11, № 4. – P. 33–39.
165. Tronchin, L. The Use of Volterra Series for Simulating the Nonlinear Behaviour of Musical Instruments / L. Tronchin, A. Venturi // Proc. of the Second Vienna Talk on Music Acoustics. Institute of Musical Acoustics (Wiener Klangstil). – Vienna, 2010. – P. 141–144.
166. Van Trees, H.L. Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I / H.L. Van Trees. – New York : John Wiley & Sons. –1968. – 697 p.
167. Villani L.G.G. An optimizationless stochastic Volterra series approach for nonlinear model identification / L.G.G. Villani, S. da Silva, A. Cunha // J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. – 2022. – Vol. 44, № 6. – P. 260–268.
168. Volterra, V. Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari / V. Volterra // Mem. Soc. Ital. Sci. – 1887. – Vol. 6. – P. 1–104; 1902 – Vol. 12. – P. 3–68.

169. Voskoboinikov, Yu. Choise of the cubic spline smoothing parameter by the cross-validation method / Yu. Voskoboinikov // Norwegian Journal of Development of the Int. Science. – 2021. – № 66. – P. 22–27.
170. Voskoboinikov, Yu. Identification of Quadratic Volterra Polynomials in the "Input–Output"Models of Nonlinear Systems / Yu. Voskoboinikov, S. Solodusha, E. Markova, E. Antipina, V. Boeva // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, № 11. – P. 1836.
171. Voskoboinikov, Yu.E. New stable algorithm of nonparametric identification of technical systems / Yu.E. Voskoboinikov, V.A. Boeva // Modern high technologies. – 2019. – № 5. – P. 25–29.
172. Voskoboinikov, Yu.E. Synthesis of smoothing cubic spline in nonparametric identification technical systems' algorithm / Yu.E. Voskoboinikov, V.A. Boeva // IOP Conf. Series : Materials Science and Engineering. XIII Int. Scientific Conf. Architecture and Construction 2020, Institute of Physics Publishing. – 2020. – P. 012035.
173. Wang, Y. Smoothing Splines Methods and Applications / Y. Wang // Ser. Monographs on Statistics and Applied Probability. A Chapman and Hall book. – 2011. – Vol. 121. – 347 p.

**Приложение А. Свидетельства о государственной регистрации
программ для ЭВМ**



Рисунок А.1 – Свидетельство №2020617244. Численное решение двумерного интегрального уравнения Вольтерра I рода относительно несимметричного ядра методом Рунге-Кутта (программное обеспечение разрабатывалось лично)



Рисунок А.2 – Свидетельство №2022618264. Численное решение одномерного интегрального уравнения в задаче идентификации ядер Вольтерра на базе кусочно-линейных тестовых сигналов (программное обеспечение разрабатывалось лично)



Рисунок А.3 – Свидетельство №2022682577. Непараметрическая идентификация линейных стационарных динамических систем при прямоугольном входном сигнале (личный вклад: реализация и верификация программного кода для случая с точно заданными данными)

Приложение Б. Документы о практическом использовании результатов диссертационного исследования

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
**ИНСТИТУТ СИСТЕМ ЭНЕРГЕТИКИ
им. Л. А. МЕЛЕНТЬЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ИСЭМ СО РАН)**

664033, Иркутск-33, ул. Лермонтова, 130
Тел. (395-2) 42-47-00
Факс (395-2) 42-67-96
E-mail: info@isem.irk.ru

AKT

Об использовании результатов диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

Антипиной Екатерины Дмитриевны

«Математическое моделирование нелинейных динамических систем с векторным входом в теплознегергетике (численные методы, алгоритмы)»

Настоящий акт подтверждает, что результаты диссертационной работы Антипиной Е.Д. на тему «Математическое моделирование нелинейных динамических систем с векторным входом в теплоэнергетике (численные методы, алгоритмы)» использовались Федеральным государственным бюджетным учреждением науки Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук при выполнении научно-исследовательских работ в рамках проектов государственного задания программы фундаментальных исследований Российской Федерации:

- «Теория и методы современного математического программирования и моделирования в интеллектуальных системах энергетики» (2019–2020 гг.);
 - «Равновесные и динамические модели интеллектуальных систем энергетики: теория и численные методы» (2021–2025 гг.).

Врио директора ИСЭМ СО РАН,
академик РАН

В.А. Стеников

