На правах рукописи

Ботороева Мария Николаевна

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Улан-Удэ – 2018

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Иркутский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ИГУ»)

Научный руководитель:	**Булатов Михаил Валерьянович** доктор физико-математических наук, ФГБУН Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, лаборатория дифференциальных уравнений и управляемых систем, главный научный сотрудник
Официальные оппоненты:	**Кузнецов Евгений Борисович** доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», кафедра «Моделирование динамических систем», профессор
	Маркова Евгения Владимировна кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБУН Институт систем энергетики имени Л.А. Мелентьева СО РАН, лаборатория неустойчивых задач вычислительной математики, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет»**

Защита состоится «21» декабря 2018 года в 15:30 часов на заседании диссертационного совета Д212.022.10 при ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет» по адресу: 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, д. 24а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет», расположенной по адресу: г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 4а, а также на сайте: http://www.bsu.ru/dissers/?did=765

Автореферат разослан « ___ » __________ 2018 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
канд. физ.-мат. наук, доцент Т. Г. Дармаев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В различных предметных областях существуют динамические системы, которые способны к обновлению своих элементов, выполняющих определенные функции и отличающихся между собой показателями эффективности и сроками службы. Такие системы были названы развивающимися[1] (РС).

Весьма эффективными при описании динамики РС и оптимального управления оказались интегральные модели (ИМ), содержащие уравнения вольтерровского типа с оператором вида

$$V[x] := \int\limits_{a(t)}^{t} K(t,s)x(s)ds = f(x), \tag{1}$$

где $a(t)$ — неубывающая функция. Однако возможность практического применения такого сорта ИМ сдерживается недостаточным развитием анализа качественных свойств и прикладной интерпретации моделей, теории и численных методов решения возникающих математических задач.

ИМ могут описываться системой взаимосвязанных интегральных уравнений Вольтерра (ИУВ) как первого, так и второго рода и алгебраических уравнений. Такие системы могут быть представлены в виде интегрального уравнения с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью, которое будем называть интегро-алгебраическим уравнением[2] (ИАУ). При проведении исследования были учтены результаты, известные для ИАУ, которые стали появляться относительно недавно. К настоящему времени исследованы лишь некоторые классы таких задач.

Цикл работ М.С. Никольского, Н.А. Сидорова и его учеников посвящен изучению линейных ИАУ в бесконечномерных пространствах.

Для ИАУ в конечномерных пространствах в разные годы были описаны характеристики сложности: В.Ф. Чистяковым введено понятие индекса ИАУ как наименьшего порядка дифференциального оператора, обращающего ИАУ в систему ИУВ II рода, W. Gear (США) ввел понятие индекса по невязке, аналогичное понятию степени некорректности, введенному ранее А.С. Апарциным для интегральных уравнений I рода.

Первая статья[3], посвященная исследованию и численному решению полуявных ИАУ индекса один, вышла в 1987 году. В ней были сформулированы условия существования единственного непрерывного решения и предложен простейший метод численного решения.

ИАУ посвящено несколько разделов вышедшей в 2004 г. фундаментальной монографии[2] H. Brunner, однако, исследуемые в данной работе задачи относятся к полуявному виду. Kauthen P.-J. (Швейцария) для частных случаев ИАУ разработал методы Рунге-Кутта. Hadizadeh M. (Иран) с уче-

---

[1] Глушков, В.М. Моделирование развивающихся систем / В.М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 350 с.

[2] Brunner, H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations / H. Brunner. – University Press, Cambridge, 2004. – 612 p.

[3] Чистяков, В. Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах / В. Ф. Чистяков//Функции Ляпунова и их применения. — Новосибирск: Наука, 1987. – С. 231–239.

никами для полуявных ИАУ индекса один разработали численные методы в виде специальных полиномов.

Булатов М.В. провел исследование на предмет существования единственного решения ИАУ с ядром типа свертки. Им же предложен метод регуляризации для ИАУ индекса один.

В 2012 году М.В. Булатовым и О.С. Будниковой были предложены многошаговые методы для численного решения линейных ИАУ, которые обладают свойством саморегуляризации, то есть параметром регуляризации является шаг дискретизации.

К настоящему времени практически нет работ, посвященных качественной теории и численному решению ИАУ с переменными пределами интегрирования. Таким образом, в рамках моделирования РС весьма актуальным оказывается качественное исследование ИАУ с переменными пределами интегрирования и разработка численных методов их решения с последующей программной реализацией. Именно таким направлениям посвящена диссертационная работа.

В настоящей диссертационной работе поставлена задача разработки стратегии ввода новых элементов РС для достижения заданного уровня роста производства внешнего продукта элементами РС. Данная задача описывается системой уравнений, среди которых ИУВ как первого, так и второго рода на основе оператора (1) и алгебраические уравнения. Такие системы представляются в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования.

Целью диссертационной работы является качественное исследование моделей РС в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования и разработка методов их численного решения.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Анализ существования единственного непрерывного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования, описание их свойств и построение на их основе модели РС.

2. Разработка и программная реализация k-шаговых методов численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования; построение, исследование устойчивости и программная реализация L-устойчивого безытерационного метода второго порядка точности для численного решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода.

3. Расчет стратегии ввода генерирующих мощностей электроэнергетической системы России до 2056 г., обеспечивающей заданную динамику роста располагаемой мощности.

Методы исследования. В работе используются методы теории обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, теории матричных пучков, теории разностных схем и теории устойчивости.

Научная новизна результатов, выносимых на защиту.

1. Впервые модели РС представлены в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования. Такая запись позволяет привлечь удобный для исследования на предмет существования единственного непрерывного решения аппарат теории матричных пучков.

2. Получены условия о существовании единственного непрерывного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования, которая позволяет эффективно исследовать модели РС на предмет существования единственного непрерывного решения. Приводится исследование конкретной модели ЭЭС.

3. Предложены k-шаговые методы для численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования, используя которые возможно получить стратегию развития моделируемых систем с требуемой точностью.

4. Построены безытерационные L-устойчивые методы численного решения систем нелинейных ИУВ II рода, которые обладают вторым порядком точности.

Теоретическая и практическая значимость результатов. В диссертационной работе исследован новый класс задач ИАУ с переменными пределами интегрирования: сформулирована и доказана теорема существования единственного непрерывного решения, описаны основные свойства, предложены численные методы решения.

Результаты диссертационной работы позволяют строить модели РС различных предметных областей, проводить их исследование и численные расчеты с высокой точностью. В диссертационной работе приведен пример исследования модели ЭЭС. Получена стратегия ввода генерирующих мощностей ЭЭС России для достижения заданного роста располагаемых мощностей.

Разработаны программы для ЭВМ, предназначенные для численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017614303 от 11.04.2017 «Программа численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования многошаговыми методами»).

Также в работе предложен безытерационный L-устойчивый метод второго порядка точности для численного решения систем ИУВ II рода (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017615853 от 25.05.2017 «Неявный безытерационный метод численного решения жестких нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода»).

Результаты исследований отражены в ряде публикаций и в научных отчетах, выполненных в рамках грантов РФФИ (проекты 18–51–54001–Вьет–а, 16–51–540002–Вьет–а, 16–31–00219 мол_а, 15–01–03228_а, 14-01-31224 мол_а, 13–01–93002, 11–01–00639_а, 11–01–93005–Вьет–а, 10–01–00571_а).

Достоверность полученных результатов. Научные положения, сформулированные в диссертационной работе, согласуются с ранее полученными результатами для ИАУ с постоянным нижним пределом интегрирования (В.Ф. Чистяков, М.В. Булатов), неклассических ИУВ I рода (А.С. Апарцин). Приводятся численные расчеты тестовых примеров с известным точным решением и проведено их сравнение с другими известными численными методами. Адекватность математических моделей и эффективность предложенных алгоритмов подтверждается сравнением численных прогнозов с полученными ранее[4] и с реальными данными вводов генерирующих мощностей. Полученный прогноз ввода генерирующих мощностей ЭЭС России так же хорошо согласуется с планом министерства энергетики РФ.

Результаты, полученные другими авторами, используются в диссертационной работе и отмечаются ссылками. Все результаты диссертации обсуждались на научных конференциях и семинарах.

Работа соответствует пунктам:

2 «развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей»;

3 «разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»;

4 «реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» паспорта научной специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научных **международных** мероприятиях:

- Международный семинар «New Approaches in the Analysis and Numerical Solution of Differential and Integral Equations» (Иркутск–Байкал, 8–13 августа 2010 г.);

- Российско-монгольская конференция молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению (Иркутск–Ханх, 2011 г.);

- Международный семинар «New Approaches in the Analysis and Numerical Solution of Differential and Integral Equations» (Иркутск–Харанцы, 8–15 августа 2011 г.);

- X Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление» (Казань, 12–15 июня 2012 г.);

- III Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 25 июня – 1 июля 2012 г.);

- II Российско-монгольская конференция молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению (Россия—Монголия, 25 июня – 1 июля 2013 г.);

- Workshop Systems and Control Theory (Вьетнам, Ханой, 2013 г.);

- V Congress of the Turkic World Mathematicians (Киргизия, Булан-Соготту, 5–7 июня 2014 г.);

- Международный семинар «Numerical Solution of Integral and Differential Equations» (Харанцы, 15–20 июля 2014 г.);

- Международный семинар «New Approaches in the Analysis and Numerical Solution of Differential and Integral Equations» (Вьетнам, Ханой, 7–9 ноября 2014 г.);

- Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам (Москва, 19–21 ноября 2015 г.);

[4] Апарцин, А. С. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем /А. С. Апарцин, И. В. Сидлер // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 6. – С. 3-16.

- VIII Международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 1—7 сентября 2016 г.);

- First Mongolia-Russia-Vietnam Workshop on Numerical Solution of Differential and Integral Equations (Монголия, 10–11 сентября 2016 г.);

- Второй Монгольско-Российско-Вьетнамский семинар «Численное решение интегральных и дифференциальных уравнений» (Харанцы, 1–7 июля 2017 г.);

- Международная конференция «Математика в современном мире» (Новосибирск, 14–19 августа 2017 г.);

- VIII Международная конференция по математическому моделированию (Якутск, 4–8 июля 2017 г.);

всероссийских конференциях и семинарах:

- XI конференция по математическому моделированию и информационным технологиям (Иркутск, 15–21 марта 2010 г.);

- «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 9–11 декабря 2013 г.);

- XIII Всероссийская конференция молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии» (Иркутск–Ангасолка, 2017 г.);

на **научных** семинарах в Институте систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Московском авиационном институте, Бурятском государственном университете и Иркутском государственном университете.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, среди которых 8 статей, в том числе 3 работы в журналах, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ [1-3], 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [4-5].

В совместных статьях [1,3,9,10] личный вклад соискателя заключается в построении численных методов решения поставленных задач и проведении расчетов; в статьях [6] и [2] — анализ существования единственного непрерывного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования и с несколькими нижними переменными пределами интегрирования соответственно. Представление в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования и анализ модели ЭЭС в статье [3] также проведен Ботороевой М.Н. самостоятельно. Результаты, выносимые на защиту, получены автором лично и не нарушают авторских прав других лиц.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 139 страниц с 9 рисунками, 10 таблицами и списком литературы из 90 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** сформулирована цель диссертационного исследования, обоснована его актуальность, представлен обзор литературы по изучаемой проблеме, приведены краткое содержание диссертации и ее основные результаты.

В **первой главе** описано построение математической модели РС в виде не встречающегося ранее в литературе линейного ИАУ с переменными пределами интегрирования

$$A(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t-c_j}^{t} K_j(t,s)x_j(s)ds = f(t),\ 0 \le s \le t \le T, \tag{2}$$

где $A(t)$ — ненулевая квадратная матрица размерности n, удовлетворяющая условию $\det A(t) \equiv 0$, $K_j(t,s) = \begin{pmatrix} K_{1j}(t,s) \\ ... \\ K_{nj}(t,s) \end{pmatrix}$, $j = 1, 2, ..., m,\ m \le n$, $f(t)$ — известная, а $x(t)$ — искомая n-мерные вектор-функции, c_j — известные положительные постоянные величины. Для данного уравнения заданы стартовые значения

$$x(t) = x^0(t) = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ ... \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [-\max_j c_j, 0),\ j = 1, 2, ..., m. \tag{3}$$

Из столбцов $K_j(t,s)$ и нулевых n-мерных столбцов $K_{j+1}, ..., K_n$ можно образовать квадратную матрицу $K(t,s) = (K_1(t,s), ..., K_m(t,s), ..., K_n(t,s))$. Элементы матриц $A(t), K(t,s)$ и вектор-функций $x(t), f(t)$ представляют собой технические характеристики моделируемой РС, описание которых приведено в тексте диссертации.

Для поставленной задачи сформулирована и доказана теорема существования единственного непрерывного решения

Теорема 1.

Пусть для задачи (2), (3) выполнены условия:

1) элементы матриц $A(t)$, $K(t,s)$ и вектор-функции $f(t)$ являются непрерывно-дифференцируемыми функциями;

2) $rank A(t) = deg(det(\lambda A(t) + K(t,t))) = q = const\ \forall t \in [0,T]$;

3) $W(0)f'(0) = W(0)\left[(K(0,0) + A'(0))\, x^0(-0)\right] -$

$$-W(0) \textstyle\sum_{j=1}^{m} K_j(0,-c_j)x_j^0(-c_j) + W(0) \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{-c}^{0} (K_j(0,s))'_t x_j^0(s)ds,$$

где $W(0) = E - A(0)A^{-}(0)$; матрица $A^{-}(t)$ удовлетворяет условию $A(t)A^{-}(t)A(t) = A(t)$;

4) $A(0)x^0(-0) = f(0) - \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{-c_j}^{0} K_j(0,s)x_j^0(s)ds.$

Тогда данная задача имеет единственное непрерывное решение.

Частным случаем (при $m = 1$) задачи (2), (3) является ИАУ вида

$$A(t)x(t) + \int\limits_{t-c}^{t} K(t,s)x(s)ds = f(t),\ 0 \le s \le t \le T, \quad \det A(t) \equiv 0, \tag{4}$$

где $x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция, известны: $A(t)$ и $K(t,s)$ — квадратные матрицы размерности n, $f(t)$ — n-мерная вектор-функция, c — положительная постоянная величина. Заданы значения неизвестной вектор-функции на предыстории

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [-c, 0). \tag{5}$$

Задача (4), (5) описывает несколько упрощенную модель РС.

Далее освещены сложности, связанные с исследованием линейных ИАУ с переменными пределами интегрирования (4), (5) и построением численных методов их решения. Все теоретические положения иллюстрируются примерами.

Приводится описание построения многошаговых методов, основанных на явных квадратурных формулах Адамса и экстраполяционных формулах.

Зададим на отрезке интегрирования $[-c;T]$ равномерную сетку $t_\nu = \nu h$, $\nu = -N, -N+1, ..., [\frac{T-h}{h}] + 1$, $h = \frac{c}{N}$, $N \geq k$ — натуральное число. Введем следующие обозначения $A(t_{i+1}){=}A_{i+1}$, $K(t_{i+1,l}){=}K_{i+1,l}$, $f(t_{i+1}){=}f_{i+1}$, $x(t_l){=}x_l$ при $l \geq 0$, $x^0(t_l){=}x_l$ при $l < 0$. Значения на предыстории $x^0(t_i){=}x_i$, $i{=}-N, -N+1, ..., -1$ считаются заданными.

Для некоторой известной функции $\psi(t_i)$, определенной на $[-c, T]$ запишем формулу явного метода Адамса

$$\int\limits_{t_{i-N+1}}^{t_{i+1}} \psi(s)ds = \int\limits_{t_{i-N+1}}^{t_{i-N+k+2}} \psi(s)ds + \sum_{j=i-N+k+2}^{i} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \psi(s)ds \approx$$

$$\approx \int\limits_{t_{i-N+1}}^{t_{i-N+k+2}} L^0_{k+1}(\psi_{i-N+1}, \psi_{i-N+2}, ..., \psi_{i-N+k+1}, s)ds+ \tag{6}$$

$$+ \sum_{j=i-N+k+2}^{i} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} L^j_{k+1}(\psi_{j-k}, \psi_{j-k+1}, ..., \psi_j, s)ds =$$

$$= h \sum_{l=i-N+1}^{i-N+k+1} \beta_{l-i+N-1}\psi_l + \sum_{j=i-N+k+2}^{i} h \sum_{l=0}^{k} \gamma_l \psi_{j-l} =$$

$$= h \sum_{l=i-N+1}^{i} \omega_{N-k+1,l}\psi_l,$$

где $L^j_{k+1}(\psi_{j-k}, \psi_{j-k+1}, ..., \psi_j, s)$ — интерполяционный полином степени k, проходящий через точки $(\psi_{j-k}, t_{j-k}), (\psi_{j-k+1}, t_{j-k+1}), ..., (\psi_j, t_j)$,
$j = i-N+k+2, i-N+k+3, ..., i$.

Матрицы значений $\omega_{N-k+1,l}$ для $k = 1, 2, 3, 4, 5$ приведены в тексте диссертации.

Отметим, что первый индекс весов $\omega_{N-k+1,l}$ обозначает номер строки представленных матриц и не зависит от i. Таким образом, при счете используется лишь одна строка коэффициентов, ее выбор зависит от числа узлов сетки на предыстории $[-c;0)$.

В диссертации предложено для вычисления интегрального слагаемого в (4) применять явные методы Адамса (6), а значение x_{i+1} в выражении $A_{i+1}x_{i+1}$, вычислять как значение в точке $t = t_{i+1}$ интерполяционного полинома степени k, проходящего через точки $(x_{i-k}, t_{i-k}), (x_{i-k+1}, t_{i-k+1}), ..., (x_i, t_i)$, то есть

$$x_{i+1} \approx L^i_{k+1}(x_{i-k}, x_{i-k+1}, ..., x_i, t_{i+1}) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j},$$

коэффициенты α_j приведены в тексте диссертации.

Придерживаясь такого подхода, для решения задачи (4), (5) получим многошаговые методы

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i-j} + h\sum_{l=i-N+1}^{i}\omega_{N-k+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1}, \tag{7}$$

$i = 0, 1, ..., \left[\frac{T-h}{h} + 1\right] + 1$.

Методы (7) программно реализованы в среде Maple 13. Многочисленные расчеты модельных примеров показали, что методы (7) при $k \le 5$ сходится к точному решению с порядком $k+1$. Приведем лишь один иллюстрирующий пример. Пусть для ИАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int\limits_{t-1}^{t}\begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ e^{t-2s} & e^{t+s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t + te^{-t} \\ (t+1)e^t + t^2e^{-t} + e - 1 \end{pmatrix},\ t \in [1, 4],$$

заданы стартовые функции $u^0(t) = e^t,\ v^0(t) = e^{-t},\ t \in [0, 1)$. Данная задача удовлетворяет условиям существования единственного непрерывного решения. Точное решение: $u(t) = e^t,\ v(t) = e^{-t}$.

В Таблице 1 представлен анализ порядков точности $P(err_1)$, $P(err_2)$, $P(err_3)$ k-шаговых методов (7) при $k = 1, 2, 3$ соответственно.

Таблица 1

h	0,1	0,05	0,025
$P(err_1)$	$1,9$	$2,0$	$2,0$
$P(err_2)$	$2,9$	$2,9$	$3,0$
$P(err_3)$	$3,8$	$3,9$	$4,0$

Здесь err_k — погрешности вычисления по евклидовой норме k-шаговых методов (7) при $k = 1, 2, 3$ соответственно. Порядки точности

$P(err_k), k = 1, 2, 3$ вычислены по известной[5] формуле

$$P(err_k)(h) = log_2 \frac{err_k(h)}{err_k(\frac{h}{2})},\ k = 1, 2, 3.$$

Расчеты других примеров приведены в тексте диссертации.

Вторая глава посвящена построению эффективного численного метода для решения жестких нелинейных ИУВ II рода

$$x(t) = \int\limits_0^t K(t, s, x(s))ds + f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \tag{8}$$

где $K(t, s, x(s))$ и $f(t)$ — известные, достаточно гладкие n-мерные вектор-функции, $x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция.

Системы (8) могут использоваться при моделировании различных процессов. В качестве примера в диссертации приведена модель суточного колебания концентрации озона в атмосфере в виде жесткой системы нелинейных ИУВ II рода.

При численном решении жестких систем (8) возникает ряд трудностей. Явные методы не эффективны, т.к. требуют «малого» шага интегрирования. Реализация неявных методов требует решения систем нелинейных уравнений, что влечет за собой целый ряд дополнительных трудностей: выбор подходящего итерационного метода, начального приближения и критерия остановки итерационного процесса.

Для жестких обыкновенных дифференциальных уравнений (начальная задача) хорошо зарекомендовали себя методы типа Розенброка[6]. Для жестких интегральных уравнений (8) таких алгоритмов не предложено.

Опишем предложенный в диссертации метод. Введем на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку $t_l = lh, l = \overline{0, N}$, $h = 1/N$, и обозначим $f_{l+1} = f(t_{l+1})$, $x_{l+1} \approx x(t_{l+1})$, $J(t, s, x) = \frac{\partial K(t,s,x)}{\partial x}$, E — единичная матрица размерности n.

С учетом этих обозначений выпишем для задачи (8) простейший метод, основанный на квадратурной формуле левых прямоугольников:

$$x_{i+1} = h \sum_{j=0}^{i} K(t_{i+1}, t_j, x_j) + f_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, ..., N - 1, \tag{9}$$

$$x_0 = f(0),$$

и линеаризованный неявный метод, основанный на квадратурной формуле правых прямоугольников:

$$x_{i+1} = h \sum_{j=1}^{i} K(t_{i+1}, t_j, x_j) + hK(t_{i+1}, t_{i+1}, x_i) +$$

[5] Деккер, К. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. – М.: Мир. – 1988. – 334 с.

[6] Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. — М.: Мир, 1999. — 685 с.

$$+hJ(t_{i+1},t_{i+1},x_i)(x_{i+1}-x_i)+f_{i+1}, \quad i=0,1,2,\ldots,N-1.$$

Последнюю формулу перепишем в виде

$$(E-hJ(t_{i+1},t_{i+1},x_i))\,x_{i+1}=$$

$$=h\left[\sum_{j=1}^{i}K(t_{i+1},t_j,x_j)+K(t_{i+1},t_{i+1},x_i)-J(t_{i+1},t_{i+1},x_i)x_i+f_{i+1}\right], \quad (10)$$

$i=0,1,2,\ldots,N-1$.

Объединяя (9) и (10) в переопределенную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно x_{i+1}, получим

$$\begin{pmatrix} E \\ E-hJ(t_{i+1},t_{i+1},x_i) \end{pmatrix} x_{i+1}=\begin{pmatrix} f_{i+1} \\ f_{i+1} \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} h\sum\limits_{j=0}^{i}K(t_{i+1},t_j,x_j) \\ h\left[\sum\limits_{j=1}^{i}K(t_{i+1},t_j,x_j)+K(t_{i+1},t_{i+1},x_i)-J(t_{i+1},t_{i+1},x_i)x_i\right] \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$i=0,1,...N-1$.

СЛАУ (11) в общем случае не имеет решения. Умножим обе части (11) слева на матрицу $(E|E-hJ(t_{i+1},t_{i+1},x_i))$ и получим

$$\left(E+(E-Q_i)^2\right)x_{i+1}=(2E-Q_i)(h\sum_{j=1}^{i}K(t_{i+1},t_j,x_j)+f_{i+1})+$$

$$+h\left[K(t_{i+1},t_0,x_0)+(E-Q_i)(K(t_{i+1},t_{i+1},x_i)-Q_ix_i)\right], \quad (12)$$

где $Q_i=hJ(t_{i+1},t_{i+1},x_i), \quad i=\overline{0,N-1}$.

Матрица $\left(E+(E-Q_i)^2\right)$ перед главной частью оказалась неособенной. СЛАУ (12) имеет единственное решение.

Для предсказания свойств численных методов решения задачи (8) используют[7] тестовое уравнение

$$x(t)=\int_0^t(\lambda+\mu(t-s))\,x(s)ds+a_1+a_2t, \quad (13)$$

где λ и μ — вещественные числа и $\lambda<<0$, $\mu\le 0$.

Уравнение (13) эквивалентно ОДУ второго порядка

$$x''(t)=\lambda x'(t)+\mu x(t), \quad x(0)=a_1, \quad x'(t)\mid_{t=0}=\lambda a_1+a_2$$

[7] Kershaw, D. Volterra equations of the second kind / D. Kershaw // Numerical solution of integral equations. — 1974. – P. 140–161

при $\mu \neq 0$ и ОДУ первого порядка

$$x'(t) = \lambda x(t), \quad x(0) = a_1 \tag{14}$$

при $\mu = 0, \quad a_2 = 0$.

Введем обозначеия $z = \lambda h, r = \mu h^2$.

Любой одношаговый метод для уравнения (14) можно представить в виде $x_{i+1} = R(z)x_i$, где $R(z)$ принято называть функцией устойчивости[8] (полином или дробно-рациональная функция). Если $| R(z) | < 1$ при $z < 0$, то метод называется A-устойчивым, а если при этом $\lim\limits_{z\to\infty} R(z) = 0$, то метод называется L-устойчивым.

Для модельной задачи (13), при $\mu = 0$ метод (12) дает рекуррентное соотношение $x_{i+1} = \left(\frac{1}{1-z+\frac{z^2}{2}}\right) x_i$, т.е. является L-устойчивым.

Метод (12) объединяет «хорошие» качества метода, основанного на квадратурной формуле трапеции (второй порядок), и метода, основанного на квадратурной формуле правых прямоугольников (L-устойчивость).

Составим характеристическое уравнение для модельного примера (13). Для этого из $(l + 1)$-ой строки вычтем удвоенную l-ю строку и прибавим $(l - 1)$-ю строку (подействуем разностным аналогом оператора дифференцирования второго порядка). В итоге получим рекуррентное соотношение

$$(2 - 2z + z^2)\rho^2 + ((z - 2)(2 + r - z) - 2z)\rho + 2 = 0. \tag{15}$$

Областью устойчивости метода (12) назовем[9] те вещественные значения z и r, при которых корни ρ характеристического уравнения (15) лежат в единичном круге, и на границе круга нет кратных корней.

На Рисунке 1 приведена область устойчивости метода (12) для уравнения (13).

Приведем расчеты одного из модельных примеров

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \int\limits_0^t \begin{pmatrix} -101x_1(s) - 100x_2(s) \\ x_1(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} -101 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Точное решение: $x_1(t) = -e^{-t} - 100e^{-100t}$, $x_2(t) = e^{-t} + e^{-100t}$.

В Таблице 2 значения err_1, err_2, err_3 – евклидовы нормы погрешностей с шагом интегрирования h методов, основанных на квадратурной формуле правых прямоугольников, формуле трапеций и метода (12) соответственно.

Таблица 2

h	0,2	0,1
err_1	0,0340	0,0180
err_2	0,0970	0,0270
err_3	0,0020	0,0005

[8] Деккер, К. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. – М.: Мир. – 1988. – 334 с.

[9] Brunner, H. The numercal solution of Volterra equations / H. Brunner, P. J. van der Houwen. – Amsterdam: North-Holland, CWI Monographs 3, 1986. – 588 p.

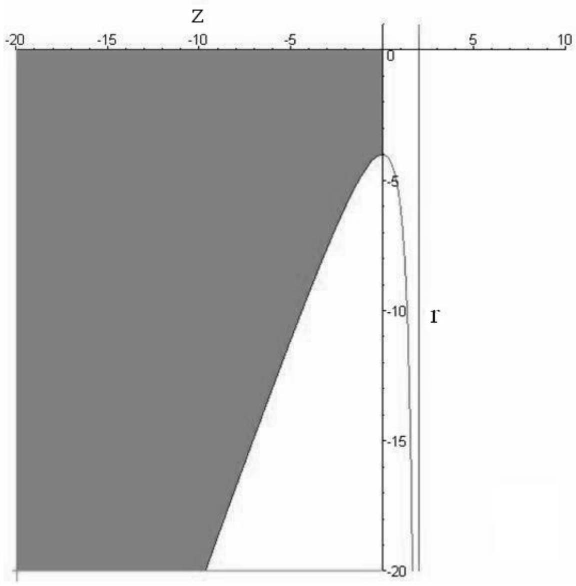

Рисунок 1 — Область устойчивости метода (12) для модельного примера (13) (заштрихована)

Третья глава посвящена применению ИАУ с переменными пределами интегрирования (4), (5) и их частных случаев ИУВ I рода с переменными пределами интегрирования к моделированию ЭЭС.

В первом параграфе приводится описание математической модели ЭЭС состоящей из шести типов электростанций (трех типов неатомных и трех типов атомных), которая учитывает ограничения на топливо и капиталовложения, сроки жизни электростанций и динамику замены устаревших технологий новыми.

Пусть $\varphi_i(t) \geq 0$ — вводимая в момент времени t мощность электростанций i-го типа, $i = \overline{1,6}$; $\quad t \in [0, T]$, 0 и T — начало и конец прогнозируемого периода соответственно.

Для каждого из шести типов станций известны следующие технико-экономические характеристики:

1) $m_i(t)$ (руб./МВт) — удельные капиталовложения в момент времени t;

2) $b_i(t)$ (кг у.т./МВт·ч) — удельный расход топлива в момент времени t;

3) c_i — срок жизни электростанции (будем предполагать, что для каждого типа электростанции это одна и та же постоянная величина $c_i = c$);

4) $\beta_i(t-s)$ — скорость создания новых мощностей в момент времени t в расчете на единицу мощности, введенной ранее в момент времени s.

На предыстории $t \in [-c, 0)$ известны функции

$$\varphi_i(t) = \varphi_i^0(t), \quad i = \overline{1,6}. \tag{16}$$

Задана динамика потребления необходимых ресурсов: $F(t)$ — динамика электропотребления; $M(t)$ — динамика капвложений на развитие ЭЭС; $B(t)$ (кг у.т.) — суммарный расход ограниченного топлива для неатомных станций; $B_u(t)$ — динамика использования природного урана $t \in [0, T]$.

Также считаются известными значения некоторых параметров:

— $\gamma(t)$ — доля маневренных мощностей от суммы всех введенных к моменту t;

— $q_i \neq 0, i = \overline{4,6}$, — удельная критическая загрузка (кг у.т./кВт) ядерным

топливом, необходимая для первоначального запуска АЭС соответствующего типа;
— $\alpha_i, i = \overline{4,6}$, — удельная выгрузка вторичного ядерного топлива из АЭС соответствующего типа;
— μ и ν — доли вторичного ядерного топлива, поступающего из АЭС типов 4 и 5, 6 соответственно, идущие на склад после химической переработки.

Формулируется задача построения стратегии ввода новых генерирующих мощностей ЭЭС, которая описывается линейным ИАУ с переменными пределами интегрирования (4), где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_1(t) & m_2(t) & m_3(t) & m_4(t) & m_5(t) & m_6(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & q_6 \end{pmatrix},$$

$$K(t,s) = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu\alpha_4\beta_4 & (b_5(t)-\nu\alpha_5)\beta_5 & (b_6(t)-\nu\alpha_6)\beta_6 \end{pmatrix},$$

$$\eta_i = b_i(t)\beta_i(t-s), \quad \beta_i = \beta_i(t-s), \quad i = \overline{1,6},$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t) & \varphi_4(t) & \varphi_5(t) & \varphi_6(t) \end{pmatrix}^T,$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} F(t) & \gamma(t)F(t) & M(t) & B(t) & B_u(t) & 0 \end{pmatrix}^T,$$

функции (16) являются стартовыми.

Качественный анализ задачи подтверждает, что существует единственное непрерывное решение соответствующего ИАУ с переменными пределами интегрирования (существует единственная стратегия ввода генерирующих мощностей для достижения заданной динамики роста располагаемых мощностей).

Далее описывается модель ЭЭС России [10] [11]. Ставится задача построения прогноза ввода генерирующих мощностей для достижения заданного уровня роста располагаемой мощности в виде ИУВ I рода с переменными пределами интегрирования

$$\int\limits_{t-30}^{t} x(s)ds + 0,97\int\limits_{t-50}^{t-30} x(s)ds + 0,9\int\limits_{t-60}^{t-50} x(s)ds = f(t), \quad t \in [60,100], \qquad (17)$$

где $x(t)$ – генерирующая мощность, введенная в момент t; $f(t)$ — экспертно задаваемая располагаемая мощность ЭЭС. Все элементы моделируемой системы разбиваются на возрастные группы: моложе 30 лет, от 30 до 50

[10] Апарцин, А. С. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем /А. С. Апарцин, И. В. Сидлер // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 6. – С. 3-16.

[11] Апарцин, А. С. Интегральные модели развития систем электроэнергетики с учетом старения оборудования электростанций /А. С. Апарцин, И. В. Сидлер // Электронное моделирование. – 2014. – Т. 36. – № 4. – С. 81-88.

лет, от 50 до 60 лет. Элементы каждой возрастной группы функционируют с соответствующим, экспертно заданным, коэффициентом эффективности: 1; 0,97 и 0,9 соответственно. Элементы, чей возраст превышает 60 лет, выводятся из системы без возможности их возврата.

Значения введенных генерирующих мощностей по годам с 1950 по 2016 г. были предоставлены сотрудниками Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН.

С помощью разработанного алгоритма численного решения ИУВ I рода с переменными пределами интегрирования одношаговым методом (метод (7) при $k = 1$) была определена стратегия ввода новых генерирующих мощностей ЭЭС России, начиная с 2010 и до 2050 г. включительно, которая обеспечит ежегодный рост располагаемой мощности $f(t)$, на 2 %. На Рисунке 2 эта стратегия сравнивается с полученной ранее[12] и реальными данными вводов генерирующих мощностей. Полученный прогноз вводов генерирующих мощностей соизмерим с реальными данными, что подтверждает адекватность модели (17) и эффективность предложенных численных методов.

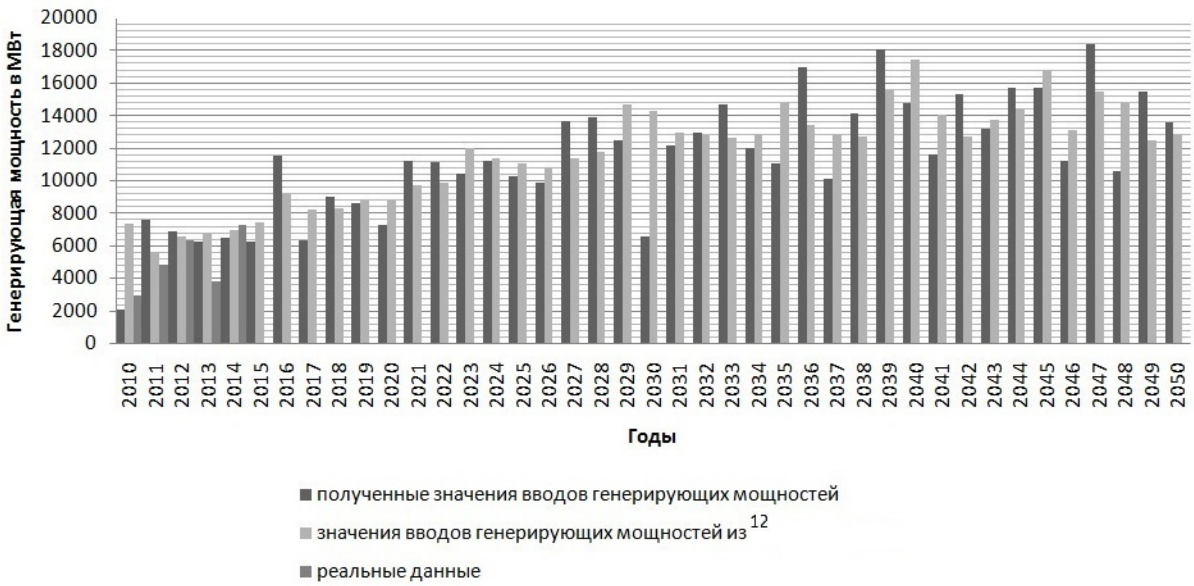

Рисунок 2 — Сравнение стратегий ввода генерирующих мощностей с 2010 по 2050 г. для достижения роста располагаемой мощности на 2 % ежегодно

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Модель развивающихся систем представлена в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования.

2. Получены условия существования единственного непрерывного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования. С ее помощью исследованы модели ЭЭС на предмет существования единственного непрерывного решения.

[12] Апарцин, А. С. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем /А. С. Апарцин, И. В. Сидлер // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 6. – С. 3-16.

3. Построены и программно реализованы (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017614303) k-шаговые методы для численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования. Проведены численные эксперименты, подтверждающие, что данные методы сходятся к точному решению с порядком $k + 1$.
4. Построены и программно реализованы (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017615853) L-устойчивые безытерационные методы численного решения систем нелинейных ИУВ II рода. Построена их область устойчивости.
5. Проведен сравнительный анализ предложенных методов для численного решения ИУВ II рода с ранее известными в вычислительных экспериментах, демонстрирующих вычислительную эффективность их применения.
6. Разработан алгоритм применения одношагового метода для численного решения ИУВ I рода с переменными пределами интегрирования (17), с помощью которого получена стратегия ввода генерирующих мощностей ЭЭС России для достижения заданного уровня роста располагаемой мощности.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в рецензируемых журналах из списка рекомендованных ВАК:

1. Булатов, М. В. Некоторые особенности поведения численных методов решения интегральных уравнений Вольтерра II рода / М. В. Булатов, М. Н. Мачхина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54. – № 3. – С. 496–502.
2. Bulatov, M. V. Existence and uniqueness of solutions to integral-algebraic equations with variable limits of integrations / M. V. Bulatov, M. N. Machkhina, V. N. Phat // Communications on Applied Nonlinear Analysis. – 2014. – Vol. 21. – No. 1. – P. 65–76.
3. Ботороева, М. Н. Приложения и методы численного решения одного класса интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования / М. Н. Ботороева, М. В. Булатов // Известия иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2017. – Т. 20. – С. 3–16.

Свидетельства о гос. регистрации программ для ЭВМ:

4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017614303. Программа численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования многошаговыми методами / М. Н. Ботороева ; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет». - № 2017611570 ; заявл. 27.02.2017 ; зарегистр. 11.04.2017. - 1 с.

5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017615853. Неявный безытерационный метод численного решения жестких нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода / М. Н. Ботороева ; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет». - № 2017612716 ; заявл. 31.03.2017 ; зарегистр. 25.05.2017. - 1 с.

Публикации в других научных изданиях:

6. Булатов, М. В. Об одном классе интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования / М. В. Булатов, М. Н. Мачхина // Журнал Средне-Волжского математического общества. – 2010. – Т. 12. – № 2. – С. 40–45.

7. Мачхина, М. Н. Численное решение интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования / М. Н. Мачхина // Современные проблемы обучения математике и информатике. Часть I. Современные проблемы обучения математике: материалы V Всероссийской научно-практической конференции учителей и преподавателей математики и информатики, посвященной памяти И.Г. Пудалова. – Иркутск: Вост.-Сиб. гос. академ. образов., 2012. – С. 133–138.

8. Мачхина, М. Н. Численное решение интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования / М. Н. Мачхина // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Международной Четаевской конференции. Т.1. Секция 1. Аналитическая механика. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. – С. 340–345.

9. Ботороева, М. Н. О численном решении интегро-алгебраических уравнений / М. Н. Ботороева, О. С. Будникова // IX Всероссийская научно-практическая конференция учителей и преподавателей математики «Современные проблемы обучения математике». – Иркутск: ООО «Издательство Оттиск», 2016. – С. 126–132.

10. Ботороева, М. Н. Многошаговые методы и их модификация для численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования / М. Н. Ботороева, О. С. Будникова // X Всероссийская научно-практическая конференция, посвященная 90-летию со дня рождения профессора Б. А. Бельтюкова, «Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании». – Иркутск: ООО «Издательство Оттиск», 2017. – С. 167–172.