На правах рукописи

До Тиен Тхань

МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

05.13.18 – «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск – 2015

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Иркутский национальный исследовательский технический университет» (ФГБОУ ВО «ИРНИТУ»)

Научный руководитель	доктор физико-математических наук **Булатов Михаил Валерьянович**
Официальные оппоненты	**Сизых Виктор Николаевич,** доктор технических наук, доцент, ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет путей сообщения», кафедра «Автоматизация производственных процессов», профессор кафедры **Маркова Евгения Владимировна,** кандидат физико-математических наук, доцент, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, старший научный сотрудник
Ведущая организация	ФГАОУ ВПО «Дальневосточный федеральный университет», г. Владивосток

Защита диссертации состоится «23» декабря 2015 г., в 10.00 часов на заседании диссертационного совета Д212.022.10 при ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет» по адресу: 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет» по адресу: г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 4а, а также на сайте http://www.bsu.ru/dissers/.

Автореферат разослан «____»____________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Дармаев Тумэн Гомбоцыренович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Математические модели многих физических процессов, в частности, формирование контура микроскопического пузыря в неоднородной жидкости и описание многоконтурных электрических цепей включают в себя обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ), не разрешенные относительно главной части. Для интегро-дифференциальных уравнений под главной частью понимается старшая производная искомой вектор-функции. Начальная (краевая) задача для таких уравнений требует исследования на предмет существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения. Даже если решение таких задач существует, единственно и достаточно гладкое, то его, как правило, не удается найти в аналитическом виде. Если для таких задач применить численные методы, разработанные для ИДУ, разрешенных относительно главной части, то в результате мы получим систему линейных (нелинейных) алгебраических уравнений, которая либо не имеет решения, либо имеет множество решений. Даже в линейном случае стандартные дискретные методы часто порождают неустойчивый процесс. Таким образом, возникает необходимость в разработке и программной реализации эффективных численных методов решения таких задач.

В диссертации рассматриваются следующие проблемы:

1. Формулировка достаточных условий существования единственного решения ИДУ, не разрешенных относительно главной части, с заданными начальными (краевыми) условиями.
2. Построение и обоснование численных методов решения таких задач и определение областей их устойчивости.
3. Применение полученных результатов к математическим моделям электроцепей и разделения пограничных сред «жидкость-газ».

Работа посвящена разработке численных алгоритмов решения уравнений вида:

$$A(t)x'(t)+F(t,x(t))+\int_0^t G(t,s,x(s))ds=f(t), \tag{1}$$

с заданными начальными (конечными) условиями.

Детально рассмотрены случаи:

1. $A(t) = t^p,\ p > 0,\ t \in (0,M],\ F(t,x) \equiv 0,\ x(M) = \xi$, где $x(t)$ – искомая функция;
2. $A(t)$ – $(n \times n)$-матрица, $F(t,x(t))$ и $G(t,s,x(s))$ – n-мерные вектор-функции, $t \in [0,1]$, причем $\det A(t) \equiv 0$, с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

которое согласовано с правой частью.

В первом случае такое уравнение называется сингулярным интегро-дифференциальным и имеет вид

$$t^p x'(t) = \int_0^t f(x(s))ds,\ t \in [0,M] \tag{3}$$

с условием

$$x(M) = \xi. \tag{4}$$

Данное уравнение является интегральным аналогом сингулярного дифференциального уравнения второго порядка, возникающего при определении профиля пузырьков (капелек) в жидкости (газе) (см., напр., P. Lima[1]).

Разработкой численных методов решения данной задачи активно занимались как российские, так и зарубежные авторы. Значительный вклад внесли Auzinger W., Cahn J.W., Hastermann G., Hillard J.E., Hoog F. de, Kneisl G., Lima P., Weinmuller E.B., Rotoli G., Конюхова Н.Б., Куликов Г.Ю., Соловьев М.Б. При реализации алгоритмов, разработанных этими авторами, для решения данного уравнения требуется выбирать очень маленький шаг интегрирования, что ведет к большим вычислительным затратам.

Во втором случае предполагается, что входные данные достаточно гладкие в соответствующих областях определения. Как уже отмечалось выше, такие системы уравнений находят широкое применение при математическом моделировании электрических цепей (в работах Ушакова Е.И.[2], Сенди К.[3]).

[1] N.B. Konyukhova, P.M. Lima, M.L. Morgado and M.B. Soloviev. Bubbles and droplets in nonlinear physics models: analysis and numerical simulation of singular nonlinear boundary value problems, Comp. Maths. Math. Phys. 48, N.11 (2008) 2018-2058.

[2] Ушаков, Е.И. Статическая устойчивость электрических систем / Е.И. Ушаков. – Новосибирск: Наука, 1988. – 273 с.

[3] Сенди, К. Современные методы анализа электрических цепей / К. Сенди – М.: Энергия, 1971. – 360 с.

Если в выражении (1) отсутствует интегральная составляющая, то такие уравнения с условиями (2) принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Начиная с середины 70-х годов качественной теорией и разработкой численных методов решения ДАУ занимались в России (Бояринцев Ю.Е., Абрамов А.А., Кузнецов Е.Б., Курина Г.А., Горбунов В.К. и их ученики), Германии (Marz R., Kunkel P., Mehrmann V., Lubich Ch. и их ученики), Швейцарии (Hairer E., Wanner G.), США (Campbell S., Petzold L., Gear W., Rheinboldt и их ученики) и в ряде других стран. С той поры вышли тысячи статей и десятки монографий, посвященных исследованию данных систем. Это связано с тем, что ДАУ описывают многие важные прикладные задачи. Этому аспекту тематики посвящены работы (Bock H.G.[4], Михайлов В.Б.[5] и другие). Исследованием уравнений с вырожденным оператором перед главной частью занимались Свиридюк Г.А., Федоров В.Е., Келлер А.В. (Челябинск), Сидоров Н.А., Фалалеев М.В. (Иркутск) и их ученики, Favini A. (Италия), Yagi A. (Япония) и др.

Если в выражении (1) матрица $A(t)$ – тождественно ненулевая и $F(x(t),t) = B(t)x(t)$, где $B(t)$ – $(n \times n)$-матрица и $detB(t) \equiv 0$, то такие уравнения принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ). Исследование этих уравнений началось относительно недавно. Первой работой является статья Чистякова В.Ф.[6] С той поры вышло несколько публикаций по этой теме, авторами которых являются Булатов М.В., Будникова О.С. (Иркутск), Hadizadeh M. (Иран) и его ученики, Brunner H. (Канада, Гонконг).

Наконец, если $A(t)$ – тождественно нулевая матрица, $F(x(t),t) \equiv 0$, то мы имеем интегральные уравнения Вольтерра I рода (ИУВI). Численными методами решения таких уравнений и прикладными задачами, которые описываются ИУВ, занимались Апарцин А.С., Бакушинский А.В., Сизиков В.С., Верлань А.Ф., Linz P., Brunner H. и другие.

Численное решение таких систем наталкивается на большие трудности. В частности многие методы приводят либо к неустойчивому процессу, либо

[4]Differential-Algebraic Equations and their Connections to Optimization/ H.G. Bock., J.P. Schloder, V.H. Schulz // Interdisciplinary Center for Scientific Computing (IWR), 1996. – 188 p.

[5]Численно-аналитические методы моделирования аналоговых радиоэлектронных схем на ЭВМ: дис. ... докт. физ. мат. наук / В.Б. Михайлов – Москва, 1992. – 384 с.

[6]Чистяков, В.Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах / В.Ф. Чистяков // Функции Ляпунова и их применение. – Новосибирск: Наука, 1987. – С.231–239

к проблемами решения систем линейных алгебраических уравнений с тождественно вырожденной матрицей.

Целью диссертационной работы является применение теории вырожденных ИДУ для разработки численных методов их решения, практической реализации данных методов в задачах анализа многоконтурных электрических цепей и при моделировании процессов, протекающих в среде «жидкость-газ».

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Сформулировать достаточные условия существования единственного решения начальной задачи для систем ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью, для численного решения которых предложить и обосновать многошаговые методы.
2. Выписать математическую модель, которая описывает профиль пузыря в неоднородной жидкости, в виде сингулярного ИДУ и разработать новые эффективные методы его решения.
3. Построить математические модели многоконтурных электрических цепей, которые включают в себя систему ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью.
4. Реализовать программный комплекс в среде MATLAB для расчетов прикладных задач по разработанным алгоритмам.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются модели микроскопического пузыря в неоднородной жидкости и модели многоконтурных электрических цепей. Эти модели имеют вид сингулярных ИДУ и систем ИДУ с тождественно вырожденной матрицей при производной искомой вектор-функции. Предметом исследования являются численные методы для решения задач указанных выше видов.

Методы исследования. При проведении исследований применялись математический аппарат теории матриц, теории обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, теории разностных схем и сведения, относящиеся к моделированию электрических цепей.

Достоверность результатов. Достоверность полученных результатов подтверждается достаточно точным совпадением результатов расчетов по предложенным алгоритмам с результатами расчетов, достоверность которых была доказана ранее, и расчетами тестовых примеров.

Работа соответствует паспорту специальности 05.13.18 по следующим пунктам: п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 5 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Научная новизна диссертационной работы представлена следующими научными результатами, выносимыми на защиту:

1. Сформулированы достаточные условия существования единственного решения начальных задач для ИДУ с тождественно вырожденной главной частью.
2. Для такого класса задач впервые предложены и обоснованы эффективные многошаговые численные методы высокого порядка. Построены области устойчивости этих алгоритмов.
3. Выписано уравнение для нахождения радиуса пузыря в зависимости от плотности окружающей жидкости в виде сингулярного ИДУ. Разработаны численные методы его решения, для реализации которых требуется существенно меньше вычислительных затрат, чем для ранее разработанных.

Теоретическая значимость диссертационной работы состоит в следующем:

1. Получены условия, при выполнении которых вырожденные ИДУ разрешимы и имеют единственное решение.
2. Предложены и обоснованы численные методы для решения выделенных классов ИДУ. Получена оценка скорости сходимости методов и построены их области устойчивости.
3. Выписана математическая модель нахождения профиля пузыря в неоднородной жидкости в виде сингулярного ИДУ с краевыми условиями. Предложены эффективные численные методы решения таких задач.
4. Приведен детальный качественный анализ вырожденных систем ИДУ, которые моделируют многоконтурные электрические цепи.

Практическая значимость работы заключается в том, что разработан программный комплекс, реализующий численные методы решения сингулярных ИДУ и позволяющий существенно ускорить процесс вычислений профиля пузыря в жидкости. Также программно реализованы многошаговые методы решения вырожденных систем ИДУ(начальная задача), которые описывают многоконтурные электроцепи.

Результаты диссертационного исследования были использованы в учебном процессе ИРНИТУ при проведении занятий по дисциплине «Численные методы решения интегральных и дифференциальных уравнений», что подтверждено соответствующим актом о внедрении.

Апробация. Результаты, излагаемые в диссертации, докладывались на следующих конференциях: IV Международная научная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (Воронеж, 2011 г.); Отчетная конференция ИДСТУ СО РАН «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 2011, 2012, 2013, 2014 г.); XII Прибайкальская Школа-семинар «Моделирование, оптимизация и информационные технологии» (Иркутск – Ангасолка, 2012 г.); X Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление» (Казань, 2012 г.); III Международная Школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 2012 г.); XVIII Байкальская Всероссийская конференция «Информационные и математические технологии в науке и управлении» (Иркутск, 2013 г.); Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Малые Винеровские чтения» (Иркутск, 2014 г.); Международный семинар «Численное решение интегральных и дифференциальных уравнений» (Иркутск, 2014 г.); 6th International Conference on High Performance Scientific Computing (Hanoi city: Institute of Mathematics, 2015 г.)

Результаты диссертационного исследования неоднократно докладывались на научных семинарах кафедры Вычислительной техники ИРНИТУ (зав. кафедрой, доцент Дорофеев А.С.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах, из которых 3 статьи опубликованы в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Получено одно свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015619250.

Личный вклад автора. В совместных работах [1-4], [6-10] постановки задач принадлежат научному руководителю, в работе [5] – В.Ф. Чистякову, а в публикациях [3], [14] – М.В. Булатову и П. Лиме. Доказательство существования единственного решения для начальной задачи вырожденных систем ИДУ, обоснование численных методов, все численные расчеты и выкладки проведены автором лично.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Полный объем диссертации составляет 114 страниц с 20 рисунками и 16 таблицами. Список литературы содержит 101 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цель и задачи, раскрыта научная новизна и практическая значимость полученных результатов, представлен обзор текущей литературы по теме диссертации, приведена структура и краткий обзор содержания работы.

В главе 1 рассмотрены вспомогательные теоретические сведения, а именно, приведены некоторые определения, характерные свойства матричных пучков и матричных полиномов, сформулированы достаточные условия существования, единственности решения начальных задач для ИДУ с тождественно вырожденной главной частью.

Основные результаты главы 1 базируется на следующих понятиях и лемме:

Определение 1. [7] Матричный полином $\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)$, где λ – скаляр, y – k-мерный вектор, $y \in U = \{y : ||y|| \le \rho\}$, имеет простую структуру в области U, если выполнены условия:

1) $\mathrm{rank} A(y) = \mathrm{const} = l \ \forall y \in U$;
2) $\mathrm{rank}[A(y)|B(y)] = l + m = \mathrm{const} \ \forall y \in U$;
3) $det(\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)) =$

$$= a_0(y)\lambda^{2l+m} + \ldots + a_{2l+m}(y), \ a_0(y) \ \neq 0 \ \forall y \in U.$$

Лемма 1. [8] *Если матричный полином $\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)$ имеет простую структуру при любом $y \in U$, и элементы матриц $A(y), B(y), C(y)$ принадлежат*

[7] Булатов, М.В. Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально алгебраических уравнений высокого порядка / М.В. Булатов, Ли М.Г. // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 10. — С. 1299–1305.

[8] Булатов, М.В. Об одном семействе вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, Е.В. Чистякова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1665–1673.

классу $C^r(U)$, то существуют невырожденные для любого $y \in U$ матрицы $P(y)$ и $Q(y)$ с элементами из класса $C^r(U)$ такие, что

$$P(y)(\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y))Q(y) =$$
$$= \lambda^2 \begin{pmatrix} E_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} J_1(y) & 0 & J_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1(y) & C_2(y) & 0 \\ C_3(y) & C_4(y) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix},$$

где E_m, E_l, E_{n-m-l} – единичные матрицы размерности m,l и $n-m-l$, соответственно. $J_1(y)$, $J_2(y)$, $C_i(y)$, $i = \overline{1,4}$ – матрицы подходящей размерности.

Доказаны достаточные условия существования единственного решения задачи (1), (2) в терминах матричных многочленов.

Теорема 1. *(Основный результат главы 1) Пусть для задачи* (1)*,* (2) *выполнены условия:*
1) элементы матрицы $A(t)$ и вектор-функций $F(t,x)$, $G(t,s,x)$, $f(t)$ дважды непрерывно-дифференцируемы в окрестности точки $(0,x_0)$;
2) $\mathrm{rank}(A(0) + VA'(0) + VB(0,x_0)) = \mathrm{rank}(A(0) + VA'(0) + VB(0,x_0)|f(0) + {}$
$+Vf'(0) - F(0,x_0) - VF'(0,x_0) - VG(0,0,x_0))$;
3) в окрестности точки $(0,x_0)$

$$\mathrm{rank} A(t) = l = \mathrm{const}\,,\ \mathrm{rank}(A(t)|B(t,x)) = l + m = \mathrm{const}\,,$$

и матричный полином $\lambda^2 A(t) + \lambda B(t,x) + C(t,x)$ имеет простую структуру;
4) матрица $P(t,x)$ в лемме 1 не зависит от x, т.е. $P(t,x) = P(t)$.
Тогда существует отрезок $[0,\gamma]$, на котором определено единственное решение задачи (1)*,* (2)*.*

Здесь $V = E - AA^-$, где A^- – полуобратная матрица к матрице $A(0)$.

В главе 2 выделен класс линейных систем вырожденных ИДУ, который имеет вид

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t),\ t \in [0,1], \det A(t) \equiv 0, \tag{5}$$

с условием

$$x(0) = x_0, \tag{6}$$

где $A(t),\ B(t),\ K(t,s)$ – $(n\times n)$-матрицы, $f(t),\ x(t)$ – n-мерные известная и искомая вектор-функции. Для класса задач (5), (6) предложены и обоснованы многошаговые методы второго порядка. Отметим, что ранее разработанные неявные методы для таких задач либо неустойчивы, либо требуют значительных вычислительных затрат. Для численного решения рассматриваемых задач мы предлагаем модифицированные методы, основанные на явных формулах Адамса, а именно, для вычисления интегрального слагаемого в уравнении (5) будем использовать $k-1$-шаговый явный метод Адамса. Выражение $A(t)x^{'}(t)+B(t)x(t)$ в точке $t=t_{i+1}$ будем находить по экстраполяционным формулам. Будем вычислять x_{i+1} как значение интерполяционного полинома степени $k-1$, проходящего через точки $(x_i,t_i),(x_{i-1},t_{i-1}),\ldots,(x_{i-k+1},t_{i-k+1})$ в точке $t=t_{i+1}$, т.е.

$$x_{i+1}=L_{k-1}(x_i,x_{i-1},\ldots,x_{i-k+1},t_{i+1})=\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j x_{i-j}.$$

Аналогично, $x^{'}_{i+1}\approx x^{'}(t)|_{t=t_{i+1}}$ – значение производной интерполяционного полинома степени k, проходящего через точки $(x_i,t_i),(x_{i-1},t_{i-1}),\ldots,(x_{i-k},t_{i-k})$ в точке $t=t_{i+1}$, т.е.

$$x^{'}_{i+1}=L^{'}_k(x_i,x_{i-1},\ldots,x_{i-k},t_{i+1})=\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i-j}.$$

Таким образом, предложенные многошаговые методы имеют вид

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i-j}+hB_{i+1}\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j x_{i-j}+h^2\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l=hf_{i+1}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть для задачи* (5), (6) *выполнены условия теоремы 1. Тогда справедлива оценка* $\|x_j-x(t_j)\|=O(h^k)\ \forall j=\overline{k,N}$, *где* x_j *определены из системы* (7), $\|x_l-x(t_l)\|\le Kh^k,\ K<\infty,\ l=\overline{0,k-1},\ k\le 5$.

Также в главе 2 построены области устойчивости разработанных методов. Для конструирования области устойчивости предлагаемых методов рассмотрено тестовое уравнение

$$x^{'}(t)+\lambda x(t)+\mu\int_0^t x(\tau)d\tau=0,\ t\in[0,1],\ x(0)=x_0, \tag{8}$$

где λ и μ – вещественные неотрицательные скалярные параметры и хотя бы один из них много больше нуля. Задача (8) на протяжении многих десятилетии служит тестовым для исследования свойств более общих ИДУ, которые содержат как быстро, так и медленно убывающие и (или) осциллирующие компоненты.

Методы (7), примененные к уравнению (8), имеют вид

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j} + h\lambda \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j x_{i-j} + h^2 \mu \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1l} x_l = 0. \tag{9}$$

Обозначая $z_1 = \lambda h$, $z_2 = \mu h^2$ и вычитая из (i)-ой строки (9) $(i-1)$-ую строку, получим характеристическое уравнение

$$\sum_{j=0}^{k+1} (\bar{\alpha}_j + z_1 \bar{\beta}_j + z_2 \bar{\gamma}_j) p^{k-j} = 0. \tag{10}$$

Те значения z_1, z_2, при которых корни характеристического уравнения (10) лежат в единичном круге и на границе нет корней кратности двух, принято называть областью устойчивости метода (9).

Во втором параграфе построены области устойчивости полиномов (10) для $k = \overline{1,4}$.

В третьем параграфе приведены численные расчеты тестовых задач решения системы ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед производной.

Третья глава посвящена численному решению сингулярных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений при моделировании в пограничных средах «жидкость-газ». В первом параграфе приведено описание особых точек.

Второй параграф содержит описание задач о p-лапласиане и обзор литературы по этой теме. Рассматривается уравнение плотности контура микроскопических пузырьков, формирующихся в неоднородной жидкости[9], которое имеет вид

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \tag{11}$$

[9] Media with equations of state that depend on derivatives / S.L. Gavrilyuk, S.M. Shugrin // J. Appl. Mechanics and Technical Physics – 1996. – Vol. 37 – pp. 177–189.

$$\frac{dv}{dt} + \nabla(\mu(\rho) - \gamma\triangle\rho) = 0, \qquad (12)$$

где ρ, v – плотность и скорость жидкости, μ представляет ее химический потенциал и γ – известная постоянная константа. Полагая, что движение жидкости равно нулю и переходя к полярным координатам, получим уравнение[10]

$$\gamma\left(\rho'' + \frac{1}{r}\rho'\right) = \mu(\rho) - \mu_0, \qquad r \in (0,\infty). \qquad (13)$$

В силу симметрии пузыря имеем

$$\rho^{'}(0) = 0, \qquad (14)$$

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho_l > 0, \qquad (15)$$

где ρ_l – плотность окружающей жидкости.

Как правило, правая часть (13) является полиномом третей степени от ρ с тремя разными вещественными корнями. Тогда будем иметь

$$\mu(\rho) - \mu_0 = 4\alpha(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_l),\ 0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_l,\ \alpha > 0. \qquad (16)$$

Произведем замену переменной $x = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$ и введем обозначения $\lambda = \sqrt{\alpha/\gamma}(\rho_2 - \rho_1)$, $\xi = \frac{\rho_l - \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} > 0$. Тогда задачу (13)-(15) можно записать в виде

$$x''(r) + \frac{1}{r}x'(r) = 4\lambda^2(x(r) + 1)x(r)(x(r) - \xi) \qquad (17)$$

с начальными условиями

$$x'(0) = 0, \qquad (18)$$

$$x(\infty) = \xi. \qquad (19)$$

Уравнение (17) перепишем в виде

$$r^{-1}(rx'(r))' = f(x(r)), \qquad (20)$$

где $f(x) = 4\lambda^2(x - \xi)(x + 1)x,\ 0 < \xi < 1.$

[10] Analytical numerical investigation of bubble-type solutions of nonlinear singular problems / P.M. Lima, N.B. Konyukhova, A.I. Sukov, N.V. Chemetov // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2006. – Vol. 189 – pp. 260–273.

С учетом краевого условия (18) перепишем задачу (17)-(19) в интегральном виде

$$x'(r)=\int\limits_0^r \frac{\tau f(x(\tau))d\tau}{r},\ r\in(0,M],\ x(M)=\xi, \tag{21}$$

где M – достаточно большое число.

Для численного решения уравнения (21) введем равномерную сетку на отрезке $[0,M]$: $r_i=ih$, $i=\overline{1,N}$, с размером шага интегрирования h таким, что $Nh=M$. Полагаем $x'(r_{i+1})\approx(x_{i+1}-x_i)/h$, а интеграл в (21) считаем методом правых прямоугольников. Зададим начальное приближение $x^0_{i+1}=x_i$. На каждом шаге для данного i решаем нелинейное уравнение относительно x_{i+1}.

$$x_{i+1}-x_i=\frac{h^2}{r_{i+1}}\sum_{j=1}^{i+1} r_j f(x_j),\quad i=\overline{1,N-1}. \tag{22}$$

Это делается с помощью метода простой итерации, который имеет вид

$$x^{\nu+1}_{i+1}=x_i+h^2 f(x^{\nu}_{i+1})+\frac{h^2}{r_{i+1}}\sum_{j=1}^{i} r_j f(x_j),\ \nu=0,1,2\dots. \tag{23}$$

Процесс продолжается, пока $\left|x^{\nu+1}_{j+1}-x^{\nu}_{j+1}\right|<\kappa$, где κ – заданное число.

Аналогично строим метод второго порядка для решения уравнения (21)

$$\frac{3x_{i+2}-4x_{i+1}+x_i}{2h}=\frac{1}{r_{i+2}}\frac{h}{2}\left(2\sum_{j=1}^{i+1} r_j f(x_j)+r_{i+2}f(x_{i+2})\right),i=\overline{0,N-2}. \tag{24}$$

В формуле (24) производную и интегральное слагаемое аппроксимируем со вторым порядком. Для вычисления x_1 используем формулу

$$x_1=x_0+\frac{h^2}{2p}f(x_0), \tag{25}$$

которая следует из асимптотического поведения $x(r)$ вблизи начала координат.

Для каждого значения i (начиная с $i=0$) мы определим x_{i+2}, решив нелинейное уравнение (24) методом простой итерации

$$x^{\nu+1}_{i+2}=\frac{4}{3}x_{i+1}-\frac{1}{3}x_i+\frac{h^2}{3r_{i+2}}\left(2\sum_{j=1}^{i+1} r_j f(x_j)+r_{i+2}f(x^{\nu}_{i+2})\right),\quad \nu=0,1,2,\dots. \tag{26}$$

Начальное приближение $x_{i+2}^{0} = x_{i+1}$.

Процесс продолжается, пока $\left| x_{j+1}^{\nu+1} - x_{j+1}^{\nu} \right| < \kappa$, где κ – требуемая точность. В данном случае можно положить $\kappa = h^2$.

Результаты расчетов показывают существенное преимущество предложенного подхода для решения исходной задачи (17)-(19) над ранее разработанными разностными схемами. А именно, для численного решения задачи (21) шаг интегрирования можно выбирать значительно большим, чем для исходного сингулярного ОДУ (17)-(19).

Далее в третьем параграфе главы 3 приведено детальное описание программной реализации для модели пузыря в жидкости, разработанная на основе модели и алгоритма, рассмотренных в третьей главе. Автором был реализован программный комплекс в среде MATLAB. На рис. 1 приведен интерфейс программы.

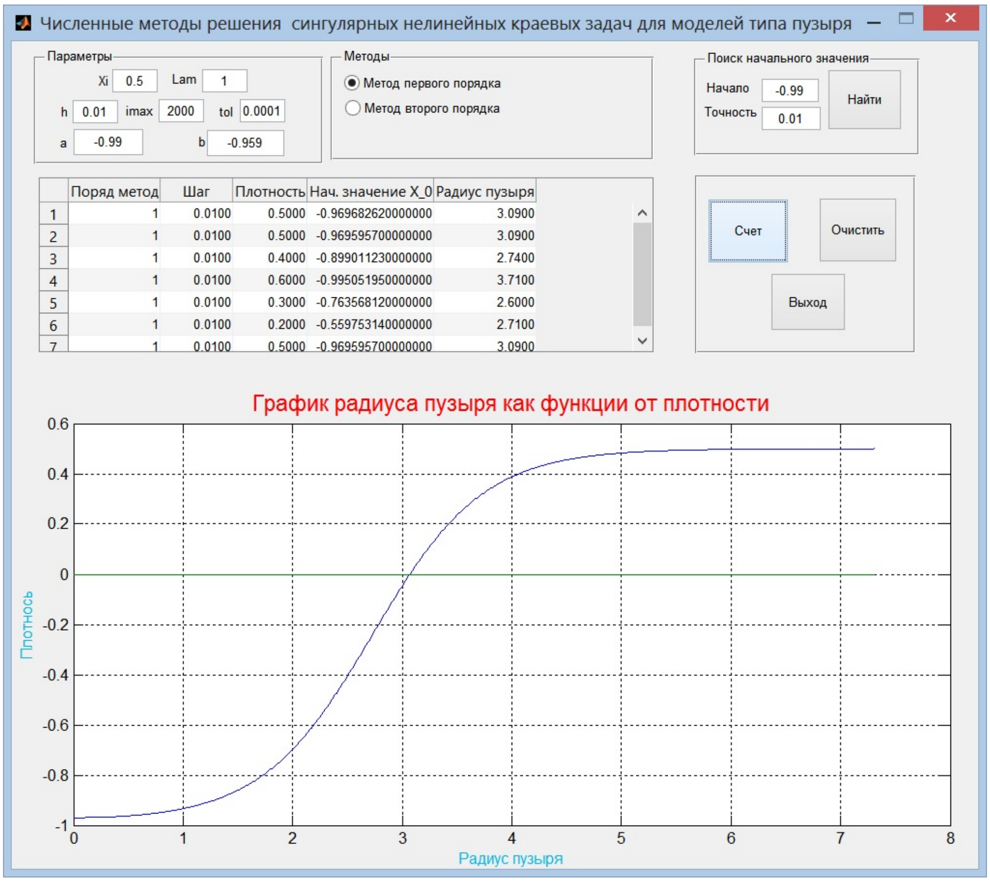

Рис. 1. Интерфейс программы

Глава 4 посвящена численным расчетам систем ИДУ при моделировании электрических цепей. В первом параграфе приведены вспомогательные сведения из теории электроцепей. Во втором параграфе описаны общие принципы моделирования электрических цепей. Третий параграф содержит качественные исследования многоконтурных цепей (трех- и четырехконтурной цепей).

Например, трехконтурная цепь с помощью законов Кирхгофа описывается системой ИДУ

$$\begin{pmatrix} L_1 & 0 & L_3 & 0 & L_5 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & L_3 & L_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5 & L_6 & L_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} R_1 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & R_6 & R_7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & \frac{1}{C_3} & 0 & \frac{1}{C_5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_5} & \frac{1}{C_6} & \frac{1}{C_7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(S) \\ i_2(S) \\ i_3(S) \\ i_4(S) \\ i_5(S) \\ i_6(S) \\ i_7(S) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Здесь приняты стандартные обозначения: C_k – емкость, R_k – электрическое сопротивление, L_k – индуктивность, i_k – ток в ветви, $j(t)$ – ток источника.

Показано, что рассматриваемые в диссертации математические модели трех- и четырехконтурных электрических цепей удовлетворяют условиям теоремы существования единственного решения в главе 1. Для численного решения этих задач можно применить методы, предлагаемые в главе 2.

Основные научные результаты:

1. Получены новые достаточные условия существования единственного решения начальных задач для ИДУ с тождественно вырожденной главной частью.

2. Выделен класс вырожденных систем ИДУ (начальная задача), для которого предложены, обоснованы и программно реализованы новые эффективные численные методы, которые были применены для расчетов процессов, протекающих в многоконтурных электроцепях.
3. Выписано конкретное сингулярное ИДУ, которое описывает профиль пузыря в неоднородной жидкости. Предложены и программно реализованы численные методы первого и второго порядков для решения таких задач. Данный подход позволяет значительно сократить вычислительные затраты по сравнению над ранее разработанных.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Булатов, М.В. Исследование интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной главной частью / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Известия ИГУ. Серия Математика. – 2013. – № 1. – С. 14-20.
2. Булатов, М.В. Методы типа Адамса для решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 93–106.
3. Bulatov, M.V. An integral method for the numerical solution of nonliner singular boundary value problems / M.V. Bulatov, Do Tien Thanh, P.M. Lima // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 5-13.

Свидетельство о государственной регистрации программы ЭВМ

4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015619250. Программа автоматизированного решения сингулярных краевых задач для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка многошаговым методом / До Тиен Тхань, М.В. Булатов // Федеральная служба по интеллектуальной собственности. – 2015.

Публикации в других изданиях

5. До Тиен Тхань. О численном решении вырожденных интегро-дифференциальных уравнений с применением параметризованных

разностных схем / До Тиен Тхань, В.Ф. Чистяков // Материалы IV междунар. научной конф. ПМТУММ. – Воронеж, 2011. – С. 97-99.

6. Булатов М.В. О применении многошаговых разностных схем для решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2011. – С. 19.
7. Булатов, М.В. Многошаговые методы для решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Аналитическая механика, устойчивость и управление. Тр. X междунар. Четаевской конф. – Казань, 2012. – Т. 1. – С. 81-85.
8. Булатов, М.В. Многошаговые методы для решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Тез. докл. III междунар. школы-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2012. – С. 15.
9. Булатов, М.В. Об одном классе вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2012. – С. 8.
10. Булатов, М.В. Многошаговые методы для численного решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Малые Винеровские чтения: Материалы Всерос. молодежной науч. практ. конф. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2013. – С. 14.
11. До Тиен Тхань. Численное решение сингулярных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка / До Тиен Тхань // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013. – С. 21.
12. До Тиен Тхань. Об многошаговых методах для интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью / До Тиен Тхань // Малые Винеровские чтения: Материалы всерос. молодежной науч.-практ. конф. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2014. – С. 48.
13. Thanh, D.T. Numerical solution of integral differential equation with singularities/ Thanh Do Tien // International seminar «Numerical solution of integral and differential equations» – Irkutsk: Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, 2014. – P. 5.

14. Bulatov, M.V. Numerical Solution of the Density Profile Equation Using an Integral Method / M.V. Bulatov, P.M. Lima, D.T. Thanh // 6th International Conference on High Performance Scientific Computing. – Hanoi: Institute of Mathematics, 2015. – P. 46.

Подписано в печать 28.10.2015. Формат 60 х 90 / 16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Усл. печ. л. 1,5.
Тираж 150 экз. Зак. 244. Поз. плана 9н.

Отпечатано в типографии Издательства
ФГБОУ ВО «Иркутский национальный
исследовательский технический университет»
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83